Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

Kurskod: TATA16
Provkod: TEN1

Tentamen i Linjär algebra (TATA16)
2022-01-12 kl 14-19

Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift kan ge 3 poäng. För godkänt krävs 8 poäng, varav minst 2 poäng skall tas på 3 olika uppgifter.
Godkänd på kontrollskivningen med poäng ≤ 14 ger 3 poäng på uppgift 1 och med poäng ≥ 15 får man 1 bonus-poäng till. Skriv 'G' eller 'G+1' i motsvarande rutan på omslaget. Resultatet kommer efter två veckor.

1. Betrakta punkterna $A(1,-1,3), B(2,1,-1), C(0,-3,4)$ och $D(1,0,5)$ i rummet.

   (i) Låt π vara det plan som går genom punkterna A, B, C. Finn planets ekvation och visa att punkten D inte ligger i planet. (1p).
   Svar: Obs $\overline{AB} = (1,2,-4)$, $\overline{AC} = (-1,-2,1)$ och $\overline{AB} \times \overline{AC} = (-6,3,0)$. Notera att vektorn $\overline{n} = (2,-1,0)$ är vinkelrät mot π. Så är $2x - y - 3 = 0$ planets ekv.
   Sätt in D i ekvationen: $2 \cdot 1 - 0 - 3 = -1 \neq 0$. Det medför att $D \notin \pi$.

   (ii) Låt P vara den ortogonala projektionen av punkten D på planet π. Finn koordinaterna av punkten P och avståndet mellan D och P (1p).
   Svar: Betrakta vektorn $\overline{AD} = (0,1,2)$. Obs att $\overline{PD} = proj_{\overline{n}}\overline{AD} = \frac{\overline{n} \cdot \overline{AD}}{|\overline{n}|^2} \cdot \overline{n} = \frac{-1}{5} \cdot (2,-1,0)$.
   Så är avståndet mellan D och P lika med $|\overline{PD}| = |\frac{-1}{5} \cdot (2,-1,0)| = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Notera att $P = D - \overline{PD} = (1,0,5) - (\frac{-1}{5}) \cdot (2,-1,0) = (\frac{7}{5}, \frac{-1}{5}, 5)$.

   (iii) I triangeln ΔBCP finn cos av vinkeln BPC (1p).
   Svar: Obs $\overline{PC} = (-\frac{7}{5}, -\frac{14}{5}, -1)$, $\overline{PB} = (\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, -6)$, $|\overline{PC}| = \frac{3}{5}\sqrt{30}$, $|\overline{PB}| = \frac{3}{5}\sqrt{105}$, $\overline{PC} \cdot \overline{PB} = \frac{45}{25}$. Så är $\cos BPC$ lika med $\frac{1}{3\sqrt{14}}$.

2. (i) Kontrollera m h a determinanten att vektorerna
   $\overline{a} = (0,2,1), \overline{b} = (3,1,-2), \overline{c} = (2,3,-1)$ bildar en bas
   i rummet R^3.

Svar: Obs $\det(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = \det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = 5 \neq 0$. Det medför att vektorerna bildar en bas i rummet R^3.

(ii) Finn koordinaterna av vektorn $\overline{d} = (5, 1, -7)$ i basen (1p).

Svar: Sätt ekv $x_1 \cdot \overline{a} + x_2 \cdot \overline{b} + x_3 \cdot \overline{c} = \overline{d}$. Använd Gauss elimination. Få fram koordinaterna $x_1 = -5, x_2 = -1, x_3 = 4$.

Gärna gör kontroll: $(-5) \cdot \overline{a} + (-1) \cdot \overline{b} + 4 \cdot \overline{c} = \overline{d}$.

(iii) Är vektorerna $\overline{u} = 3\overline{a}$, $\overline{v} = 3\overline{a} - 4\overline{b}$, $\overline{w} = 5\overline{a} + 2\overline{b} - 7\overline{c}$ linjärt oberoende? Använd definitionen för att noggrant motivera svaret (glöm ej att vektorerna $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ är linjärt oberoende, se (i)) (1p).

Svar: Sätt ekv $x_1 \cdot \overline{u} + x_2 \cdot \overline{v} + x_3 \cdot \overline{w} = \overline{0}$ (*). Finns det bara en lösning i ekv eller fler?

Skriv om (*): $x_1 \cdot (3\overline{a}) + x_2 \cdot (3\overline{a} - 4\overline{b}) + x_3 \cdot (5\overline{a} + 2\overline{b} - 7\overline{c}) = \overline{0}$ eller $\overline{a} \cdot (3x_1 + 3x_2 + 5x_3) + \overline{b} \cdot (-4x_2 + 2x_3) + \overline{c} \cdot (-7x_3) = \overline{0}$ (**). Därför att vektorerna $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ är linjärt oberoende, ekv (**) är ekvivalent till systemet:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ \qquad -4x_2 + 2x_3 = 0 \quad (***). \\ \qquad\qquad -7x_3 = 0 \end{cases}$$

Notera att determinanten av systemsmatrisen är lika med $84 \neq 0$.

Det medför att $(***)$ har exakt en lösning (den trivialla lösningen). Sa har även (*) exakt en lösning.

Det betyder att vektorerna $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ är linjärt oberoende.

3. (i) Bestäm ekvationen för den räta linje ($y = kx + b$) som bäst approximerar följande data i minstakvadratmening

$x:$	0	1	2	3	4
$y:$	1	2	0	3	1

$(2p)$

Svar: Använd normalekvationerna och få fram den räta linjen: $y = 0.1x + 1.2$

(ii) Rita en figur med punkterna och linjen, ange också det värde på y som kommer att svara mot $x = 5$ enligt metoden (1p).

Svar: $y(5) = 1.7$

4. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -1 & 8 & -4 \end{pmatrix}$

(i) Finn inversen A^{-1} till A och gör kontroll. (2p).

Svar: Använd de tillåtna radoperationerna för att transformera matrisen $(A|E)$ till matrisen $(E|A^{-1})$.

Notera att $A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & \frac{7}{2} \\ 3 & 4 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Gör kontroll genom att beräkna $A \cdot A^{-1}$. Om produkten är E så är allt korrekt.

(ii) Lös ekvationen $X \cdot A = B$. (1p).

Svar: Multiplicera ekvationen från höger med A^{-1}. Efter förkortningen får man att $X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 33 & 40 & 14 \\ 12 & 18 & \frac{13}{2} \end{pmatrix}$

5. (i) Avgör karaktären av den här kvadratiska formen $Q(\overline{x}) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2$. (1p).

Svar: Obs att $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ är formensmatrisen.

Egenvärdena till A:

$|A - \lambda E| = 0$ eller $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$. Vi får två egenvärdena, $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6$.

Ty både värdena är positiva, är formen positivt definit.

(ii) Sök maximum av $Q(\overline{x})$ på cirkeln $|\overline{x}| = 2$, och ange de $\overline{x}$ på cirkeln $|\overline{x}| = 2$ där det största värdet antas. (1p)

Svar: Största formens värde på cirkeln $|\overline{x}| = 2$ är lika med $6 \cdot 2^2 = 24$ vilket antas på vektorerna (i punkterna) $\pm\frac{2}{\sqrt{5}}(2, 1)$.

(iii) Vilken kurva i planet beskrivs av ekvationen $Q(\overline{x}) = 1$? (1p).

Tips: använd (i).

Svar: Formens uttryck efter diagonaliseringen: $Q(\overline{y}) = y_1^2 + 6y_2^2$.

Så förvandlas ekv $Q(\overline{x}) = 1$ till ekv $y_1^2 + 6y_2^2 = 1$ (#) i de nya variablerna.

Notera att ekv (#) beskriver en ellips med halvaxlarna 1 och $\frac{1}{\sqrt{6}}$ i y_1, y_2-koordinatsystem.

6. Betrakta differentialekvationssystemet $X' = A^5 \cdot X$ $(*)$,

där $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

(i) Bestäm alla lösningar till $(*)$ (2p).

Tips: tänk på sambamdet mellan egenvärden och egenvektorer till matrisen A^5 och egenvärden och egenvektorer till matrisen A.

Svar: Studera matrisen A. Denna har egenvärdena $\lambda_1 = 3$ och $\lambda_2 = 6$ med motsvarande egenvektorerna $\overline{p_1} = (1,2)$ och $\overline{p_2} = (1,-1)$, respekterat.

Notera att $\overline{p_1}$, $\overline{p_2}$ utgör en bas för rummet R^2.

Obs att matrisen A^5 har egenvärdena $\mu_1 = 3^5$ och $\mu_2 = 6^5$ med motsvarande egenvektorerna $\overline{p_1} = (1,2)$ och $\overline{p_2} = (1,-1)$, respekterat.

Så är den allmänna lösningen till $(*)$ lika med

$\overline{x(t)} = c_1 e^{3^5 t} \cdot \overline{p_1} + c_2 e^{6^5 t} \overline{p_2}$, $c_1, c_2 \in R$ och $t \in R$, eller

$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{3^5 t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{6^5 t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $c_1, c_2 \in R$ och $t \in R$.

(ii) Finn speciellt den lösning som uppfyller $x_1(0) = 5, x_2(0) = -7$. (1p).

Svar: $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = -\frac{2}{3} e^{3^5 t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{17}{3} e^{6^5 t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t \in R$.