Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

Kurskod: TATA16
Provkod: TEN1

Tentamen i Linjär algebra (TATA16)
2022-03-16 kl 08-13

Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift kan ge 3 poäng. För godkänt krävs 8 poäng, varav minst 2 poäng skall tas på 3 olika uppgifter.
Godkänd på kontrollskivningen med poäng ≤ 14 ger 3 poäng på uppgift 1 och med poäng ≥ 15 får man 1 bonus-poäng till. Skriv 'G' eller 'G+1' i motsvarande rutan på omslaget. Resultatet kommer efter två veckor.

1. Betrakta punkterna $A(1,0,5)$, $B(1,-1,3)$, $C(2,1,-1)$ i rummet.

   (i) Notera att punkterna A, B, C inte ligger på samma rät linje.
   Finn arean av triangeln ΔABC (1p).
   Svar: $\frac{\sqrt{69}}{2}$

   (ii) Vad är $\cos A$? (1p)
   Svar: $\frac{11}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{38}}$

   (iii) I vilken punkt möts alla triangelns höjder (1p).
   Svar: $(\frac{1}{23}, -\frac{121}{23}, \frac{147}{69})$

2. Bestäm värde på k för vilka systemet

$$\begin{cases} 3x + 2y + (9+k)z = k^2 - 11 \\ x - 2y + 3z = 5 - k \\ 2x + (5-k)y + 7z = k - 15 \end{cases}$$

   har exakt en lösning, oändligt många lösningar och inga lösningar alls (3p).

   Svar: Om $k \neq 1, 8$ har systemet exakt en lösning, om $k = 1$ så finns det oänligt många lösningar, om k= 8 finns det inga lösningar.

3. Antag att

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

   (i) Låt $\overline{k_1}$ och $\overline{k_2}$ vara kolonnerna på matrisen A. Kan vektorn $\bar{b}$ uttryckas som en linjärkombination av $\overline{k_1}$ och $\overline{k_2}$?
   Motivera svaret. (1p).
   Svar: nej, använd Gausselimination.

(ii) Finn minsta kvadratlösningen $\overline{x^*}$ till det linjära systemet $A \cdot \overline{x} = \overline{b}$ (2p)

Svar: $(\frac{121}{125}, -\frac{36}{125})$

4. Betrakta planet $2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$ i rummet. Låt S vara avbildningsmatrisen för speglingen i planet och P vara avbildningsmatrisen för den ortogonala projektioen på planet.

(i) Finn vektorn $\overline{u} = P \cdot \overline{v}$, där $\overline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (2p).

Svar: $\overline{u} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

(ii) Finn vektorn $\overline{w} = S \cdot \overline{u}$ (1p)

Tips. Tänk geometriskt.

Svar: $\overline{w} = \overline{u}$.

5. Betrakta differentialekvationssystemet $X' = A^3 \cdot X$ $(*)$,

där $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

(i) Bestäm alla lösningar till $(*)$ (2p).

Svar:

$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{-6^3 t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3^3 t} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $c_1, c_2 \in R$ och $t \in R$.

(ii) Finn speciellt den lösning som uppfyller $x_1(0) = 4, x_2(0) = 3$. (1p).

$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \frac{8}{9} e^{-6^3 t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{7}{9} e^{3^3 t} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $t \in R$.

6. (i) Betrakta vektorerna $\overline{a} = (-2, 6, 1), \overline{b} = (2, 3, -1), \overline{c} = (1, 7, 2), \overline{d} = (5, 2, -1)$ i rummet. Avgör om dem är linjärt oberoende eller ej. Motivera svaret m h a definitionen. (1p)

Svar: Vektorerna är beroende.

(ii) Låt A vara en kvadratisk matris och $A^2 - 4A + 3E = O$, där E är enhetsmatrisen och O är nollmatrisen av samma typ som A. Uttryck inversen till A som en summa av potenser av A och matrisen E med vissa reella koefficienter. (1p)

Svar: $A^{-1} = \frac{1}{3}(-A + 4E)$.

Kan du ange ett exempel av en (2×2)-matris $A \neq E$ som satisfierar ekvationen?

Till ex. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(iii) Antag att en kvadratisk form $Q(x_1, x_2)$ har största värdet 4 och minsta värdet -3 på cirkeln $x_1^2 + x_2^2 = 6$. Ange egenvärden till Q. Vilken kurva i planet beskrivs av ekvationen $Q(x_1, x_2) = 3$? (1p).

Svar: $\lambda_{\max} = \frac{2}{3}$, $\lambda_{\min} = -\frac{1}{2}$.

Kurvan är en hyperbol.

Lycka till !