Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

Kurskod: TATA16
Provkod: TEN1

Tentamen i Linjär algebra (TATA16)
2022-08-22 kl 08-13

Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift kan ge 3 poäng. För godkänt krävs 8 poäng, varav minst 2 poäng skall tas på 3 olika uppgifter.
Godkänd på kontrollskivningen med poäng ≤ 14 ger 3 poäng på uppgift 1 och med poäng ≥ 15 får man 1 bonus-poäng till. Skriv 'G' eller 'G+1' i motsvarande rutan på omslaget. Resultatet kommer efter två veckor.

1. Betrakta två räta linjer i rummet:

$$L_1 : \begin{cases} x_1 = 2 + t \\ x_2 = 1 + 3t \\ x_3 = 2 - t \end{cases}, \text{ och } L_2 : \begin{cases} x_1 = -2 + 3t \\ x_2 = 3 - 5t \\ x_3 = -1 + 2t \end{cases}.$$

(i) Visa att linjerna L_1, L_2 inte är parallella och de har ingen gemensam punkt. (1p).

Svar: Obs $L_1 \parallel \overline{v}_1 = (1, 3, -1)$ och $\overline{v}_2 = (3, -5, 2) \parallel L_2$.
Notera att vektorerna $\overline{v}_1, \overline{v}_2$ är icke parallella. Det medför att även linjerna L_1, L_2 är icke parallella.

Obs systemet $\begin{cases} 2 + t = -2 + 3s \\ 1 + 3t = 3 - 5s \\ 2 - t = -1 + 2s \end{cases}$ saknar lösningar

(använd Gausselimination till ex.).

(ii) Finn ekvationen för det plan π i rummet som innehåller linjen L_1 och är parallell med linjen L_2 (1p).

Svar: Betrakta vektorn $\overline{n} = \overline{v}_1 \times \overline{v}_2 = (1, -5, -14)$. Obs att $\overline{n} \perp \pi$.
I ekv $x - 5y - 14z + D = 0$ sätt in punkten $(2, 1, 2)$ och finn $D = 31$.
Planetsekv är $x - 5y - 14z + 31 = 0$.

(iii) Finn avståndet från linjen L_2 till planet π. (1p).

Svar: Obs att avståndet från linjen L_2 till planet π är lika med avståndet från punkten $(-2, 3, -1)$ till planet π. Beräkna avståndet $\frac{28}{\sqrt{222}}$ (kolla Fö 3).

2. (i) Bestäm avbildningsmatrisen A för speglingen i rummet $3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$ (2p)

Svar: Kolla Fö 6. Då är $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & -3 & 6 \\ -3 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(ii) Finn $A^{47} \cdot \overline{v}$, där $\overline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (1p).

Svar: Notera att $A^{47} \cdot \overline{v} = A \cdot \overline{v} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & -3 & 6 \\ -3 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} =$ $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 19 \end{pmatrix}$.

3. (i) Finn minsta kvadratlösningen $\overline{x^*}$ till det linjära systemet $A\overline{x} = \overline{b}$, där

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (2p)$$

Svar: Lös systemet $A^t A\overline{x} = A^t\overline{b}$. Obs att $A^t A = \begin{pmatrix} 14 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ och $A^t\overline{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$. Använd Gausselimination vidare och få fram $\overline{x^*} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(ii) Bestäm vektorn $\overline{d} = A\overline{x^*} - \overline{b}$ och dess längd. Är $\overline{x^*}$ en vanlig lösning till systemet $A\overline{x} = \overline{b}$? (1p).

Svar: Beräkna $\overline{d} = A\overline{x^*} - \overline{b} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Nej, ty $\overline{d} \neq \overline{0}$.

4. (i) Bestäm alla lösningar till differentialekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1' = -2x_1 + 4x_2 \\ x_2' = 5x_1 - x_2. \end{cases} \qquad (2p)$$

Svar: Notera att systemets matris A är $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, egenvärdena till A är $\lambda_1 = -6$ och $\lambda_2 = 3$, motsvarande egenvektorer är (till ex.) $\overline{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ och $\overline{p}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Nu får vi alla lösningar till differentialekvationssystemet:

$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{-6t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $c_1, c_2, t \in R$.

(ii) Finn speciellt den lösning som uppfyller $x_1(1) = 3,\ x_2(1) = -13$ (1p)

Svar: Lös systemet $\begin{pmatrix} 3 \\ -13 \end{pmatrix} = c_1 e^{-6\cdot 1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3\cdot 1} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

m a p c_1 och c_2.

Nu får man den lösning som uppfyller $x_1(1) = 3,\ x_2(1) = -13$:

$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \frac{67}{9} e^{-6(t-1)} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{10}{9} e^{3(t-1)} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $t \in R$.

5. Lös ekv $A \cdot X - X \cdot C = B$ m a p X, där

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -8 & 11 \end{pmatrix}$ och $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Svar: Notera att X är en (2×2)-matris. Sätt in $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ i ekvationen och få fram systemet:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -3 \\ -4x_1 + 4x_2 + x_4 = 7 \\ -x_1 + x_3 - 2x_4 = -8 \\ -x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 11 \end{cases}.$$

Använd Gausselimination. Då får $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

6. En smittsam sjukdom bryter ut i en befolkning. Av alla friska blir en tiondel sjuka efter en vecka senare, medan resten förblir friska. Av de sjuka tillfriskar hälften på en vecka.

(i) Ange ett samband på formen

$$\begin{pmatrix} s_{n+1} \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} s_n \\ f_n \end{pmatrix}$$

där f_n är friska och s_n är sjuka i slutet av den n-e veckan, $n \geq 0$ (man skall ange A) (1p).

Svar: Notera att

$$\begin{cases} s_{n+1} = \frac{1}{2}s_n + \frac{1}{10}f_n \\ f_{n+1} = \frac{1}{2}s_n + \frac{9}{10}f_n \end{cases}.$$

Så är $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{2} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}$

(ii) Om sjukdomen bryter ut i en helt frisk befolkning, bestäm andelen $F = \dfrac{\text{sjuka}}{\text{alla}}$ efter 40 veckor (2p).

Tips. När man är färdig med A, sätt $f_0 = a$ och $s_0 = 0$, observera att $F = \frac{s_{50}}{a}$ och tänk på diagonalisering.

Svar: Obs att $\begin{pmatrix} s_{40} \\ f_{40} \end{pmatrix} = A^{40} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$.

Finn A^{40} m h a diagonaliseringen av A, vidare s_{40} och

$F = \frac{1}{6}(1 - (\frac{2}{5})^{40})$.