LINKÖPINGS TEKNISKA HÖGSKOLA
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

KURSKOD: TATA16
Provkod: TEN1

TENTAMEN I LINJÄR ALGEBRA (TATA16)
2023-01-11 KL 14-19

Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift kan ge 3 poäng. För godkänt krävs 8 poäng, varav minst 2 poäng skall tas på 3 olika uppgifter.
Godkänd på kontrollskivningen med poäng ≤ 14 ger 3 poäng på uppgift 1 och med poäng ≥ 15 får man 1 bonus-poäng till. Skriv 'G' eller 'G+1' i motsvarande rutan på omslaget. Resultatet kommer efter två veckor.

1. (i) Kvadraten $ABCD$ ligger i planet $x + y + 2z = 4$. Hörnen $B(1, 1, 1)$ och $D(3, 1, 0)$ hör till en av diagonalerna. Bestäm kvadratens area. (1p)
   Svar: $\frac{5}{2}$
   (ii) Finn A's och C's koordinater under förutsättning att vinkeln mellan vektorerna $\overline{OA}$ och $\overline{e_2} = (0, 1, 0)$ är trubbig (Obs O är origo). (2p)
   Svar: $A(2 + \frac{1}{2\sqrt{6}}, 1 - \frac{5}{2\sqrt{6}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{6}})$, $C(2 - \frac{1}{2\sqrt{6}}, 1 + \frac{5}{2\sqrt{6}}, \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{6}})$

2. Låt
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ och } B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$
   (i) Bestäm inversen A^{-1} (1p).
   Svar: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 10 & 1 & 4 \\ \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$
   (ii) Gör kontroll av A^{-1} genom att beräkna $A \cdot A^{-1}$ (1p).
   Svar: $A \cdot A^{-1} = E$
   (iii) Lös ekvationen $AX = B$ (1p).
   Svar: $X = \begin{pmatrix} 23 & -20 \\ 30 & -27 \\ 10 & -9 \end{pmatrix}$

3. (i) Bestäm den räta linje $y = kx + b$ som bäst approximerar följande data i minstakvadratmening

$x:$	0	1	2	3	4
$y:$	1	4	1	3	0

   $(2p)$

Svar: $y = -\frac{3}{10}x + \frac{12}{5}$.

(ii) Rita en figur i x, y-planet med *punkterna* och *linjen*. (1p).
(Vad är detta som är minst?)
Svar: Rita figuren.

4. (i) Bestäm alla lösningar till differentialekvationssystemet

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 2y_2 \\ y_2' = y_1 + 4y_2 \\ y_3' = -2y_2 + y_3 \qquad (2p). \end{cases}$$

Svar: $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = c_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$c_1, c_2, c_3, t \in R$.

(ii) Finn speciellt den lösning som uppfyller villkoren:
$y_1(0) = 1, y_2(0) = -1,\ y_3(0) = 2$ (1p).

Svar: $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in R$.

5. Låt A vara avbildningsmatrisen för speglingen av rummet i ett plan π som går genom origo. Vektorerna $\overline{a} = (1, 1, 2), \overline{b} = (1, -1, 1), \overline{c} = (3, 1, -2)$ är egenvektorer till matrisen A.

(i) Kontrollera att $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ utgör en bas för rummet (1p)
Svar: till ex. beräkna $\det(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = 14 \neq 0$

(ii) Finn planets ekvation (1p).
Tips. Tänk geometriskt.
Svar: $3x + y - 2z = 0$.

(iii) Bestäm matrisen A^{10} (1p)
Svar: E

6. Betrakta ekvationen $3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 = 5$ $(*)$.

(i) Ange en variabelsubstitution $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, där P är en ON-matris, som transformerar den här ekvationen till en ny ekvation (**) i variablerna y_1, y_2 utan termen y_1y_2 (1p).

Svar: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ eller

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 + y_2) \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-y_1 + y_2) \end{cases}$$

(ii) Få fram den nya ekvationen (**) genom insättningen av uttrycken för x_1 och x_2 ur substitutionen i den givna ekvationen ($*$). (1p).
Svar: Gör som är skriven i uppgiften och få fram ekv $2y_1^2 + 4y_2^2 = 5$.

(iii) Rita lösningsmängden till ekvationen ($*$) i x_1, x_2-koordinatsystem. (1p)
Svar: Rita ellipsen först i y_1, y_2-koordinatsystem och sedan i x_1, x_2-koordinatsystem

Lycka till !