Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

Kurskod: TATA16
Provkod: TEN1

Tentamen i Linjär algebra (TATA16)
2023-03-15 kl 08-13

Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift kan ge 3 poäng. För godkänt krävs 8 poäng, varav minst 2 poäng skall tas på 3 olika uppgifter.
Godkänd på kontrollskivningen med poäng ≤ 14 ger 3 poäng på uppgift 1 och med poäng ≥ 15 får man 1 bonus-poäng till. Skriv 'G' eller 'G+1' i motsvarande rutan på omslaget. Resultatet kommer efter två veckor.

1. (i) Romben $ABCD$ ligger i planet $x + y + 2z = 4$. Hörnen $B(1, 1, 1)$ och $D(3, 1, 0)$ har vinklar $\frac{\pi}{3}$. Bestäm rombens area. (1p)

   Svar: Längden av sträckan BD är lika med $\sqrt{5}$, längden av sträckan AC är lika med $\sqrt{\frac{5}{3}}$. Så är arean av romben lika med $\frac{5}{2\sqrt{3}}$.

   (ii) Finn alla enhetsvektorer som är parallella med vektorn $\overline{AC}$ (1p)

   Svar: Obs att vektorn $\overline{n} = (1, 1, 2)$ är ortogonal mot planet. Så är vektorn $\overline{m} = \overline{n} \times \overline{BD} = (-1, 5, -2)$ parallell med vektorn $\overline{AC}$. Alla enhetsvektorer som är parallella med vektorn $\overline{AC}$ är $\pm\frac{1}{|\overline{m}|}\overline{m} = \pm\frac{1}{\sqrt{30}}(-1, 5, -2)$.

   (iii) Bestäm A's och C's koordinater under förutsättning att skalärprodukten $\overline{OA} \cdot \overline{e_1}$ är större än 2, där O är origo, och $\overline{e_1} = (1, 0, 0)$. (1p)

   Svar: Låt P vara mittpunkten av sträckan BD. Så "ar $P(2, 1, \frac{1}{2})$. Så är kandidater för A, C punkterna $P \pm |\overline{AP}| \cdot \frac{1}{|\overline{m}|}\overline{m} = (2, 1, \frac{1}{2}) \pm \frac{1}{6\sqrt{2}}(-1, 5, -2)$. Man får att $A(2 + \frac{1}{6\sqrt{2}}, 1 - \frac{5}{6\sqrt{2}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}})$ och $C(2 - \frac{1}{6\sqrt{2}}, 1 + \frac{5}{6\sqrt{2}}, \frac{1}{2} - \frac{1}{3\sqrt{2}})$.

2. Finn determinanten av matrisen $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ -2 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

   Svar: $\det A = -336$.

3. (i) Bestäm den räta linje $y = kx + b$ som bäst approximerar följande data i minstakvadratmening

$$\begin{array}{rccccc} x: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ y: & 4 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \qquad (2p)$$

Svar: $y=-\frac{7}{10}x+\frac{16}{5}$.

(ii) Rita en figur i x,y-planet med *punkterna* och *linjen.* (1p).

Svar: Ange på bilden punkterna och linjen.

4. (i) Bestäm alla lösningar till differentialekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 3x_2 \\ x_2' = 2x_1 + 5x_2 \end{cases} \qquad (2p).$$

Svar: $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{7t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_1, c_2, c_3, t \in R$.

(ii) Finn speciellt den lösning som uppfyller $x_1(2) = 4$, $x_2(2) = 3$ (1p).

Svar: $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} e^{2(t-2)} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{17}{5} e^{7(t-2)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in R$.

5. (i) Bestäm avbildningsmatrisen för speglingen av rummet i planet $3x + y - 2z = 0$. (2p)

Svar: $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & -3 & 6 \\ -3 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(ii) Finn bilden av vektorn $\overline{a} = (1, 1, 2)$ under avbildningen. (1p)

Svar; $(1, 1, 2)$

6. (i) Vilka av följande utryck:

$U_1 = x_1^2 + 7x_2^2 - 8x_1x_2$,

$U_2 = 8x_1^2 + 3x_2^2 - 7x_1x_2 - 5$;

$U_3 = x_1^2 + x_2 - x_1x_2$,

$U_4 = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$,

är kvadratiska former? (1p).

Svar: U_1 och U_4. Obs att U_2 är ingen kvadratisk form ty termen -5 är av grad 0 (inte 2), U_3 är ingen kvadratisk form ty termen x_2 är av grad 1 (inte 2).

(ii) Vilken av de här kvadratiska formerna är indefinit? (1p).

Svar: U_1 är indefinit ty denna har både positiva samt negativa egenvärden (9 och -1). Obs att U_4 är positivt definit ty denna har bara poitiva egenvärden (2 och 4).

(iii) Sök maximum och minimum av den här indefinita formen på cirkeln $|\overline{x}| = 2$. (1p)

Svar: max $= 36$ antas i $\pm\frac{2}{\sqrt{5}}(-1, 2)$ och

min $= -4$ antas i $\pm\frac{2}{\sqrt{5}}(2, 1)$.

Lycka till !