Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

Kurskod: TATA16
Provkod: TEN1

Tentamen i Linjär algebra (TATA16)
2023-08-21 kl 08-13

Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift kan ge 3 poäng. För godkänt krävs 8 poäng, varav minst 2 poäng skall tas på 3 olika uppgifter.
Godkänd på kontrollskivningen med poäng ≤ 14 ger 3 poäng på uppgift 1 och med poäng ≥ 15 får man 1 bonus-poäng till. Skriv 'G' eller 'G+1' i motsvarande rutan på omslaget. Resultatet kommer efter två veckor.

1. (i) Bestäm ekv på parameter form för linjen L som är skärningslinjen av planen $\alpha_1 : x + y - z = -1$ och $\alpha_2 : 2x - y + z = 0$ (1p).
   Svar: $x = -\frac{1}{3}, y = -\frac{2}{3} + t, z = t,\ t \in R.$

   (ii) Bestäm ekv på normalform för det plan β som går genom punkten $M(1, -2, 3)$ och som är vinkelrät mot linjen L (1p).
   Svar: $y + z - 1 = 0$

   (iii) Finn avståndet mellan punkten $N(3, 2, -1)$ och planet β (1p).
   Svar: 0.

2. (i) Finn inversen till matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ (1p)

   Svar: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

   (ii) Gör kontroll genom att beräkna produkten $A \cdot A^{-1}$ (1p)
   Svar: $A \cdot A^{-1} = E$.

   (ii) Lös ekvationen $A^{-1}X = B$, där $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (1p)

   Svar: $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$

3. (i) Bestäm den räta linje $y = kx + b$ som bäst approximerar följande data i minstakvadratmening

$$\begin{array}{lcccc} x_i : & 0 & 1 & 2 & 3 \\ y_i : & 2 & 6 & 2 & 8 \end{array} \qquad (2p)$$

Svar: $y = 1.4x + 2.4$

(ii) Rita figur med *punkterna* och *linjen* samt ange värde på y då $x = 4$. (1p).

Svar: $y(4) = 8$

4. Låt $Q(\overline{x}) = 11x_1^2 + 24x_1x_2 + 4x_2^2$ vara en kvadratisk form.

(i) Avgör formens karaktär (1p).

Svar: indefinit.

(ii) Sök maximum och minimum av den kvadratiska formen under bivillkoret $|\overline{x}| = 3$ (1p).

Svar: $\max Q = 180$ och $\min Q = -45$

(iii) Ange de $\overline{x}$ med $|\overline{x}| = 3$ på vilka minimum av $Q(\overline{x})$ antas.

Svar: $\pm\frac{3}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Gör kontroll genom insättning av svaret i formeln för $Q(\overline{x})$ (1p).

5. (i) Bestäm alla lösningar $x_1(t), x_2(t)$ till differentialekvationssystemet $\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = A\cdot\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$, där A är avbildningsmatrisen för speglingen av planet R^2 i linjen $x + 3y = 0$. (2p)

Svar: $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1e^t\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2, t \in R$

(ii) Finn speciellt den lösning som uppfyller $x_1(0) = 1, \ x_2(0) = 2$ (1p).

Svar: $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = -\frac{1}{10}e^t\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{7}{10}e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad t \in R$

6. En smittsam sjukdom bryter ut i en befolkning. Av alla friska blir en tiondel sjuka efter en vecka senare, medan resten förblir friska. Av de sjuka tillfriskar hälften på en vecka.

(i) Ange ett samband på formen

$$\begin{pmatrix} s_{n+1} \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} s_n \\ f_n, \end{pmatrix}$$

där f_n är friska och s_n är sjuka i slutet av den n-e veckan, $n \geq 0$ (man skall ange A) (1p).

Svar: $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{2} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}$

(ii) Om sjukdomen bryter ut i en helt frisk befolkning, bestäm andelen $F = \frac{\text{sjuka}}{\text{alla}}$ efter 30 veckor (2p).

Svar: $f = \frac{1}{6}(1 - (\frac{2}{5})^{30})$

Tips. När man är färdig med A, sätt $f_0 = a$ och $s_0 = 0$, observera att $F = \frac{s_{30}}{a}$ och tänk på diagonalisering.