LINKÖPINGS TEKNISKA HÖGSKOLA
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

KURSKOD: TATA16
Provkod: TEN1

TENTAMEN I LINJÄR ALGEBRA (TATA16)
2024-01-09 KL 08-13

Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift kan ge 3 poäng. För godkänt krävs 8 poäng, varav minst 2 poäng skall tas på 3 olika uppgifter.
Godkänd på kontrollskivningen med poäng ≤ 15 ger 3 poäng på uppgift 1 och med poäng ≥ 16 får man 1 bonus-poäng till. Skriv 'G' eller 'G+1' i motsvarande rutan på omslaget. Resultatet kommer efter två veckor.

1. I x, y-planet finns det fyra punkter: A, B, C, D. Punkten D har koordinater $(2,4)$ och punkten B har koordinater $(4,6)$. Om man vrider planet vinkeln $\frac{2\pi}{3}$ kring D (moturs) överförs B till A och A till C.

   (i) Finn koordinaterna för A och C (2p)

   Svar: Rita en bild med all inblandade punkter. Obs $\overline{DB} = (2,2)$.

   A : vridningsmatrisen $V_A = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$,

   $\overline{DA} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(1+\sqrt{3}) \\ \sqrt{3}-1 \end{pmatrix}$.

   Notera att $A = D + \overline{DA} = (1-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3})$.

   C : Obs att om man vrider planet vinkeln $-\frac{2\pi}{3}$ kring D överförs B till C.

   vridningsmatrisen $V_C = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$,

   $\overline{DC} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}-1 \\ -\sqrt{3}-1 \end{pmatrix}$.

   Notera att $C = D + \overline{DC} = 1+\sqrt{3}, 3-\sqrt{3})$.

   Sammanfatta: $A(1-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3})$ och $C(1+\sqrt{3}, 3-\sqrt{3})$

   (ii) Bestäm arean av triangeln ΔABC. (1p)

   Svar: Obs att arean $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, där a är längden $|\overline{AB}| = |\overline{AC}| = |\overline{BC}|$.

   Så är arean lika med $6\sqrt{3}$.

2. (i) Finn avbildningsmatrisen A för spegling i planet $3x_1 + x_2 - x_3 = 0$ (2p).

Svar: Kolla Fö 6, Ex. 4.

$$A = \frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -6 & 6 \\ -6 & 9 & 2 \\ 6 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

(ii) Ange en ON-bas $\mathcal{B}$ för rummet R^3 bestående av egenvektorer till A (1p).

Tips. Tänk geometriskt.

Svar: Obs att speglingsmatrisen A har två egenvärden $-1, 1$.

Notera att $\overline{n} = (3, 1, -1)$ är vinkelrät till planet. Så är vektorerna $t \cdot \overline{n}, t \neq 0$, alla egenvektorer motsvarande värde -1.

Alla noll-skillda vektorer (x_1, x_2, x_3) som satisfierar planets ekvvation bildar skaran av egenvektorer motsvarande värdet 1.

Nu får man välja en ON-bas i rummet bestående av egenvektorer. Till ex. $\overline{e_1} = \frac{1}{\sqrt{11}}(3, 1, -1)$, $\overline{e_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$, $\overline{e_3} = \overline{e_1} \times \overline{e_2} = \frac{1}{\sqrt{22}}(2, -3, 3)$.

3. (i) Visa att systemet $A\overline{x} = \overline{b}$ (#), där $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ och

$\overline{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, saknar lösningar (1p).

Svar: Använd Gauss elimination och visa att systemet saknar lösningar.

(ii) Finn minsta kvadratlösningen $\overline{x^*}$ till det linjära systemet (#) (2p).

Svar: Använd normalekvationerna: $A^t A\overline{x} = A^t\overline{b}$.

Notera att $A^t A = \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$ och $A^t\overline{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Fortsätt med Gauss elimination.

$\overline{x^*} = (\frac{7}{30}, \frac{32}{45})$

4. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \text{ och } B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

(i) Finn inversen A^{-1} till A (1p).

Svar: Sätt matrisen $(A|E)$ och transformera denna med tillåtna radoperationer till matrisen $(E|A^{-1})$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & \frac{7}{2} \\ 3 & 4 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(ii) Gör kontroll genom att beräkna $A \cdot A^{-1}$ (1p).
Svar: $A \cdot A^{-1} = E$.

(iii) Lös ekvationen $X \cdot A = B$ (1p).
Svar: Obs att $X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 27 & 33 & \frac{23}{2} \\ -11 & -12 & -4 \end{pmatrix}$

5. (i) Bestäm alla lösningar till differentialekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1' = -2x_1 + 4x_2 \\ x_2' = 5x_1 - x_2. \end{cases} \qquad (2p)$$

Svar: Obs att $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ är ekvationssytemmatrisen.
Lös sekularekvation $|A - \lambda E| = 0$ och få fram egenvärden $-6, 3$.
Finn motsvarande egenvektorer (till ex.): $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.
Skriv ner den allmänna lösningen:
$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{-6t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $c_1, c_2, t \in R$.

(ii) Finn speciellt den lösning som uppfyller $x_1(1) = 2$, $x_2(1) = 3$ (1p)
Svar: Använd svaret från (i). Stoppa in $t = 1$ i formeln:
$\begin{pmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{pmatrix} = c_1 e^{-6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Finn c_1 och c_2 (smidigt, först hitta $c_1 e^{-6}$ och $c_2 e^3$).
Sammanfatta:
$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \frac{-2}{9} e^{-6(t-1)} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{5}{9} e^{3(t-1)} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $t \in R$.

6. (i) Vilka av följande utryck:
$U_1 = x_1^2 + 6x_2^2 - 8x_1x_2$, $U_2 = 5x_1^2 + 2x_2^2 - 7x_1x_2 - 5$,
$U_3 = x_1^3 + x_2 - 4x_1x_2$, $U_4 = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_1x_2$,
är kvadratiska former?
Presentera de här kvadratiska formerna som produkter $U_i = X^t A_i X$, där A_i är symmetrisk. (1p).
Svar: Bort kasta först U_2 p g a -5 och U_3 p g a $x_1^3 + x_2$.

Få vidare:

$U_1 = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$

$U_4 = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$

(ii) Vilken av de här kvadratiska formerna är pos. definit? Motivera svaret. (1p).

Svar: Finn egenvärden för matriserna:

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$, $\frac{7 \pm \sqrt{89}}{2}$. Notera att $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$.

och

$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $1, 5$. Notera att $\lambda_{min} = 1 > 0$.

Sammanfatta: U_1 är indefinit, U_4 är positivt definit

(iii) Sök maximum och minimum av den här positivt definita formen på cirkeln $|\overline{x}| = 3$. (1p)

Svar: $\max U_4 = 6 \cdot 3^2 = 45$ och $\min U_4 = 1 \cdot 3^2 = 9$.