LINKÖPINGS TEKNISKA HÖGSKOLA
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

KURSKOD: TATA16
Provkod: TEN1

TENTAMEN I LINJÄR ALGEBRA (TATA16)
2024-03-13 KL 08-13

Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift kan ge 3 poäng. För godkänt krävs 8 poäng, varav minst 2 poäng skall tas på 3 olika uppgifter.
Godkänd på kontrollskivningen med poäng ≤ 15 ger 3 poäng på uppgift 1 och med poäng ≥ 16 får man 1 bonus-poäng till. Skriv 'G' eller 'G+1' i motsvarande rutan på omslaget. Resultatet kommer efter två veckor.

1. (i) Ange en normal till planet π_1 som går genom punkterna $A(1,0,1)$, $B(-1,2,1)$ och $C(0,1,3)$ (1p).
   Svar: till ex. $(1,1,0)$

   (ii) Bestäm ekv för det plan π_2 som är ortogonalt mot π_1 och innehåller linjen: $x = t-2,\ y = 1+3t$ och $z = t-1$ (1p).
   Svar: $x - y + 2z + 5 = 0$

   (iii) Finn avståndet mellan punkten B och planet π_2 (1p).
   Svar: $\frac{4}{\sqrt{6}}$

2. (i) Finn avbildningsmatrisen A för ortogonal projektion på planet $3x_1 + x_2 - x_3 = 0$ i rummet R^3 (2p).
   Svar: $A = \frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -3 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 10 \end{pmatrix}$

   (ii) Ange en ON-bas $\mathcal{B}$ för rummet R^3 bestående av egenvektorer till A samt motsvarande egenvärden (1p).
   Tips. Tänk geometriskt.
   Svar: till ex. $\overline{f_1} = \frac{1}{\sqrt{11}}(3,1,-1)$ svarar mot egenvärdet $\lambda_1 = 0$, $\overline{f_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$ och $\overline{f_3} = \frac{1}{\sqrt{22}}(2,-3,3)$ svarar mot egenvärdet $\lambda_2 = 1$

3. (i) Finn minsta kvadratlösningen $\overline{x^*}$ till det linjära systemet $A\overline{x} = \overline{b}$, där

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

   (2p).

Svar: $(\frac{7}{30}, \frac{32}{45})$

(ii) Kontrollera svaret med normalekvationerna (1p).

Svar: Sätt in $(\frac{7}{30}, \frac{32}{45})$ i ekv $A^t A\overline{x} = A^t\overline{b}$.

4. Låt

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

vara övergångsmatrisen från basen $\mathcal{F} = (\overline{f_1}, \overline{f_2}, \overline{f_3})$ till basen $\mathcal{G} = (\overline{g_1}, \overline{g_2}, \overline{g_3})$ d v s $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cdot T$.

(i) Finn övergångsmatrisen S från basen $\mathcal{G}$ till basen $\mathcal{F}$ (s. a. $\mathcal{F} = \mathcal{G} \cdot S$). (2p)

Tips. Repetera att $S = T^{-1}$, glöm ej att kontrollera svaret.

Svar: $S = \begin{pmatrix} 8 & 10 & \frac{7}{2} \\ 3 & 4 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $S \cdot T = E$.

(ii) Uttryck vektorn $\overline{x} = 2\overline{f_1} + 3\overline{f_2} + 5\overline{f_3}$ i basen $\mathcal{G}$. (1p)

Svar: $\overline{x} = 63.5\overline{g_1} + 25.5\overline{g_2} + 7.5\overline{g_3}$

5. (i) Bestäm alla lösningar till differentialekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 3x_2 \\ x_2' = 2x_1 + 5x_2 \end{cases} \qquad (2p).$$

Svar: $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{7t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_1, c_2, t \in R$.

(ii) Finn speciellt den lösning som uppfyller $x_1(2) = 1$, $x_2(2) = -2$ (1p).

Svar: $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = (\frac{-3}{5}) e^{2t-4} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + (\frac{-4}{5}) e^{7t-14} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in R$.

6. Låt $F(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 14x_1x_2 + 2$.

(i) Bestäm en symmetrisk matris A sådan att $3x_1^2 + 3x_2^2 + 14x_1x_2 = \overline{x}^T \cdot A \cdot \overline{x}$, där $\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ (1p).

Svar: $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$

(ii) Finn största och minsta värde av F då $|\overline{x}| = 5$ (1p).
Tips. Var uppmärksam när du räknar värdena.
Svar: $\max F = 252$, $\min F = -98$

(iii) Finn egenvärden för matrisen B sådan att $A = B^3$ (1p).
Svar: $\lambda_1 = \sqrt[3]{10}$ och $\lambda_2 = -\sqrt[3]{4}$