1 Vinjett nummer 9: beräkning av matrispotenser

1. Tag en kvadratisk $n \times n$-matris A. Vi kan beräkna $A^2 = A * A$, sedan $A^3 = A * A^2$, och $A^4 = A * A^3$, eller som $A^2 * A^2$. Antag att vi behöver beräkna A^{115}. Hur gör vi det med minst antal matrismultiplikationer?

2. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. I Python kan du göra

   ```
   import sympy
   A = Matrix([[1,2],[3,4]])
   print(A*A)
   print(A**115)
   ```

   för att se reultatet. Testa att implementera din metod!

3. Här är en annan metod: vi kan se matrisen A som en vektor i $\mathbf{R}^{n^2}$ genom att läsa av rad för rad, i vårt exempel får vi vektorn $(1, 2, 3, 4) \in \mathbf{R}^4$. Vi "identifierar" på så sätt $n \times n$-matriser med vektorer i $\mathbf{R}^{n^2}$. Så om vi räknar ut $A^0, A^1, \ldots, A^{n^2}$ så har vi $n^2 + 1$ vektorer i $\mathbf{R}^{n^2}$, de är alltså linjärt beroende.

   I själva verket så är redan $A^0, A^1, \ldots, A^n$ linjärt beroende!

   Räkna ut $A^0 = I$,A,A^2 i exemplet, konvertera till $\mathbf{R}^4$, och hitta c_1, c_0 så att
   $$A^2 + c_1 A + c_0 I = \mathbf{0}.$$
   Skriv detta som
   $$A^2 = -c_1 A - c_0 I \tag{1}$$
   Använd relationen (1) för att beräkna A^2, A^3, A^4, A^5. Kontrollera att det stämmer mha din tidigare metod.

4. Beräkna sekularpolynomet (karakteristiska polynomet) till A. Kommentar? Vad säger kurslitteraturen om "Cayley-Hamiltons sats"?

5. Hur skulle du använda (1) beräkna A^k för ett allmännt $k \geq 3$? Är det effektivare än den metod du tog fram tidigare? Vad gäller för beräkning av B^k då B är en $n \times n$-matris, då n är stort? Vilken av de två metoderna är effektivast? Kan man göra på något annat sätt?