Svar, TATA24, 2018-10-23

1. $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = -1 \end{cases}$

2. $x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -7$

3. $\bar{v} = (2,-1,1)$

4. $\bar{u}_{\parallel \bar{v}} = \frac{1}{6}(1,-1,2)$

5. $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \end{cases}$

6. $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

---

7. $\bar{u}_1 = \underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{u}_2 = \underline{e}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{u}_3 = \underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}.$

Gram-Schmidt: $\bar{f}_1 = \bar{u}_1 = \underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$

$$\bar{f}_2 = \bar{u}_2 - \frac{\bar{u}_2 \cdot \bar{f}_1}{|\bar{f}_1|^2}\bar{f}_1 = \underline{e}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{6}\underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{e}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\bar{f}_3 = \bar{u}_3 - \frac{\bar{u}_3 \cdot \bar{f}_1}{|\bar{f}_1|^2}\bar{f}_1 - \frac{\bar{u}_3 \cdot \bar{f}_2}{|\bar{f}_2|^2}\bar{f}_2 = \underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{18}{6}\underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{(-6)}{6}\underline{e}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{e}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Normering ger: Svar: $\frac{1}{\sqrt{6}}\underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \frac{1}{\sqrt{6}}\underline{e}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \frac{1}{\sqrt{6}}\underline{e}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

8. Beroendeekvationen, och villkor för att $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in V$:

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 0 & x_3 \\ 1 & -2 & 4 & 0 & 0 & x_4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -x_1 + x_2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & -4 & 4 & -1 & 0 & -x_1 + x_4 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3x_1 - 4x_2 + x_4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 \end{array}\right)$$

Trappformen ger att tredje vektorn (i def. av V) kan tas bort.

Svar: a) $(1,1,0,1), \ (2,1,-2,-2), \ (1,0,1,0).$

b) $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) ; \ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0\}.$

9. Skärningslinjen ges av $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -2 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9 \end{cases} \iff$

$$\iff \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -2 \\ \quad\quad 5x_2 + 5x_3 = -5 \end{cases}$$

Sätt $x_3 = t$ så fås $x_2 = -1-t$, $x_1 = -2+3(-1-t)+4t = -5+t$.

Vektorn från en punkt på linjen till $(2,1,-2)$ blir kortast då den är ortogonal mot linjens riktningsvektor:

$$\left(e\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \underline{e}\begin{pmatrix} -5+t \\ -1-t \\ t \end{pmatrix} \right) \cdot \underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff \underline{e}\begin{pmatrix} 7-t \\ 2+t \\ -2-t \end{pmatrix} \cdot \underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff (7-t)-(2+t)+(-2-t) = 0 \iff t = 1.$$

Kortaste vektorn är alltså $\underline{e}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = 3\underline{e}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, så kortaste avståndet blir $\left| 3\underline{e}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \underline{\underline{3\sqrt{6}}}.$