# TATA24, KONTROLLSKRIVNING 2023-10-25
# SVAR OCH KORTFATTADE LÖSNINGSSKISSER

**1.** $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-s, -t, t, s),\ s, t \in \mathbb{R}$

**2.** $x_1 - x_3 = 0$

**3.** $X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

**4.** $X = \begin{pmatrix} 1-2t \\ t \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$

**5.** $\mathbf{u}_1 = (2, 1, 1),\ \mathbf{u}_2 = (-1, 1, 1)$

**6.** $-\frac{1}{2}$ respektive $\frac{3}{2}$

**7.** Först bestäms en ortogonal bas för $U$ med Gram-Schmidt:

$$(5,3,-7,-1) - \frac{(5,3,-7,-1) \bullet (1,0,1,1)}{3}(1,0,1,1) = (6,3,-6,0)$$

som är parallell med $(2,1,-2,0)$, så $((1,0,1,1)\ \ (2,1,-2,0))$ är en ortogonal bas för $U$.

Projicera:

$$\mathbf{v}_{\|U} = \frac{(2,3,-1,2) \bullet (1,0,1,1)}{3}(1,0,1,1) + \frac{(2,3,-1,2) \bullet (2,1,-2,0)}{9}(2,1,-2,0) = (3,1,-1,1).$$

**Svar:** $(3,1,-1,1)$

**8.** En godtycklig vektor i $V$ kan skrivas $\mathbf{v} = a(1,0,-3,1) + b(1,1,-2,2) = (a+b, b, -3a-2b, a+2b)$ för $a, b \in \mathbb{R}$. Den ligger även i $U$ om och endast om

$$(1,1,1,-1) \bullet \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow a + b + b - 3a - 2b - a - 2b = 0 \Leftrightarrow -3a = 2b,$$

det vill säga om och endast om $a = -2t,\ b = 3t,\ t \in \mathbb{R}$, vilket innebär $\mathbf{v} = (t, 3t, 0, 4t),\ t \in \mathbb{R}$. (*Alternativt* kan $U$ och $V$ beskrivas som lösningsrum, varefter $U \cap V$ bestäms som lösningsrummet till systemet som består av ekvationen för $U$ och ekvationerna för $V$.)

**Svar:** $((1,3,0,4))$

**9.** Vi visar att $\mathbf{0} \in U$, att $U$ bevaras av addition samt att $U$ bevaras av multiplikation med skalär.

- Nollpolynomet $\mathbf{0}$ är noll överallt, speciellt i $x = 17$, så $\mathbf{0} \in U$.
- Om $p_1(x), p_2(x) \in U$, så gäller $p_1(17) + p_2(17) = 0 + 0 = 0$, så $p_1(x) + p_2(x) \in U$.
- Om $p(x) \in U$ och $\lambda \in \mathbb{R}$, så gäller $\lambda p(17) = \lambda \cdot 0 = 0$, så $\lambda p(x) \in U$. $\square$