TATA24, KONTROLLSKRIVNING 2023-10-26
SVAR OCH KORTFATTADE LÖSNINGSSKISSER

1. $(x_1, x_2, x_3) = (2, -1, 5)$

2. $(x, y, z) = (2 + t, 3 + t, 1 + t)$, $t \in \mathbb{R}$

3. $X = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

4. $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

5. $\mathbf{u}_1 = \dfrac{7}{6}(2, 1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = \dfrac{1}{6}(-8, 5, 11)$

6. $-\dfrac{3}{4}$ respektive $\dfrac{5}{4}$

7. Först bestäms en ortogonal bas för U med Gram-Schmidt:

$$(0, 2, 2, 0) - \frac{(0, 2, 2, 0) \bullet (1, 0, 1, 1)}{3}(1, 0, 1, 1) = \frac{2}{3}(-1, 3, 2, -1)$$

som är parallell med $(-1, 3, 2, -1)$, så $((1, 0, 1, 1)\ \ (-1, 3, 2, -1))$ är en ortogonal bas för U.

Projicera:

$$\mathbf{v}_{\parallel U} = \frac{(0, 6, 5, -2) \bullet (1, 0, 1, 1)}{3}(1, 0, 1, 1) + \frac{(0, 6, 5, -2) \bullet (-1, 3, 2, -1)}{15}(-1, 3, 2, -1) = (-1, 6, 5, -1).$$

Det sökta avståndet är

$$|\mathbf{v}_{\perp U}| = |\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel U}| = |(0, 6, 5, -2) - (-1, 6, 5, -1)| = |(1, 0, 0, -1)| = \sqrt{2}.$$

Svar: $\sqrt{2}$

8. En godtycklig vektor i U kan skrivas

$$\mathbf{u} = a(2, 1, -1, 3) + b(-9, 0, 7, -2) = (2a - 9b, a, -a + 7b, 3a - 2b)$$

för $a, b \in \mathbb{R}$. Den ligger även i V om och endast om

$$(1, 0, 1, 1) \bullet \mathbf{u} = 0 \text{ och } (1, 3, 0, 4) \bullet \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow 4a - 4b = 0 \text{ och } 17a - 17b = 0,$$

det vill säga om och endast om $a = t$, $b = t$, $t \in \mathbb{R}$, vilket innebär $\mathbf{u} = (-7t, t, 6t, t)$, $t \in \mathbb{R}$. (*Alternativt* kan U och V beskrivas som lösningsrum, varefter $U \cap V$ bestäms som lösningsrummet till systemet som består av ekvationerna för U och ekvationerna för V.)

Svar: $((-7, 1, 6, 1))$

9. Vi visar att $\mathbf{0} \in U$, att U bevaras av addition samt att U bevaras av multiplikation med skalär.

- Nollpolynomet $\mathbf{0}$ är noll överallt, speciellt i $x = 3$, så $\mathbf{0} \in U$.
- Om $p_1(x), p_2(x) \in U$, så gäller $p_1(3) + p_2(3) = 0 + 0 = 0$, så $p_1(x) + p_2(x) \in U$.
- Om $p(x) \in U$ och $\lambda \in \mathbb{R}$, så gäller $\lambda p(3) = \lambda \cdot 0 = 0$, så $\lambda p(x) \in U$. $\square$