1. $\begin{cases} x_1 = -9t \\ x_2 = t \\ x_3 = -3t \\ x_4 = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$ 2. $\frac{1}{3}(1,7,8)$ 3. $a = 2$

4. -6 5. $\begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix}$ resp. $\begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}$, $s,t \neq 0$. 6. $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

---

7. Koefficientmatrisen $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ har egenvärdena 1 och 3 med tillhörande egenrum $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$ resp. $\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$. Därför är systemets allmänna lösning

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^t + c_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{3t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Med $t = 0$ fås

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + 2c_2 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -1, \\ c_2 = 1. \end{cases}$$

Svar: $\begin{cases} x_1(t) = -e^t + 2e^{3t} \\ x_2(t) = -e^t + e^{3t} \end{cases}$

8. $U^\perp$ är lösningsrummet till $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

Lösningarna är $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-t, s-t, t, s, t)$, där $s, t \in \mathbb{R}$, så $\bar{u}_1 = (-1,-1,1,0,1)$ och $\bar{u}_2 = (0,1,0,1,0)$ bildar en bas för $U^\perp$. Gram-Schmidt ger en ortogonal bas $(\bar{b}_1, \bar{b}_2)$ där $\bar{b}_1 = \bar{u}_1$ och

$$\bar{b}_2 = (0,1,0,1,0) - \frac{(0,1,0,1,0)\cdot(-1,-1,1,0,1)}{4}(-1,-1,1,0,1)$$

$$= \frac{1}{4}(-1,3,1,4,1).$$

Normering ger en ON-bas.

Svar: $\left(\frac{1}{2}(-1,-1,1,0,1) \quad \frac{1}{2\sqrt{7}}(-1,3,1,4,1)\right)$

9. Kalla den givna matrisen A. $A^tA = I$, så F är en isometri. $\det A = 1$ och $A \neq I$, så F är en vridning kring en linje genom origo. $\square$

Linjen spänns upp av en egenvektor med egenvärde 1:

$$AX = X \iff \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \dots \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

<u>Svar</u>: $(x_1, x_2, x_3) = t(1,0,1)$, $t \in \mathbb{R}$.

10. Spektralsatsen visar att egenrummet som hör till 3 är

$$[(1,1,1)]^{\perp} = [(1,-1,0), (1,0,-1)].$$

Med $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ är den sökta matrisen alltså

$$TDT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}}.$$