1. $x_1 = 2,\ x_2 = -1$

2. $a = \frac{3}{5}$

3. $(3,1,-1)$

4. $-1$ och $5$

5. $-12$

6. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

7. Det sökta avståndet är $|\bar{u} - \bar{u}_{/\!/\mathbb{V}}|$.

Skapa en ortogonal bas för $\mathbb{V}$ med Gram-Schmidt:

$\bar{b}_1 = (1,2,-1,1)$,

$\bar{b}_2 = (3,4,-1,2) - \frac{14}{7}(1,2,-1,1) = (1,0,1,0)$.

Nu fås

$$\bar{u} - \bar{u}_{/\!/\mathbb{V}} = \bar{u} - \bar{u}_{/\!/\bar{b}_1} - \bar{u}_{/\!/\bar{b}_2} =$$

$$= (4,4,4,6) - \frac{14}{7}(1,2,-1,1) - \frac{8}{2}(1,0,1,0)$$

$$= (-2,0,2,4),$$

så kortaste avståndet är $\sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 2^2 + 4^2} = \underline{\underline{2\sqrt{6}}}$

8. Ytans ekvation kan skrivas $Q(\underline{e}X) = 40$, där

$$Q(\underline{e}X) = X^t A X \quad \text{och} \quad A = \begin{pmatrix} 12 & 0 & -4 \\ 0 & 15 & 0 \\ -4 & 0 & 18 \end{pmatrix}.$$

A:s sekularpolynom är

$$\det(A - \lambda I) = (15-\lambda)(\lambda-10)(\lambda-20),$$

så $\lambda = 10$ är det minsta egenvärdet.

Därför gäller $Q(\bar{u}) \geq |\bar{u}|^2 \cdot 10$ för alla $\bar{u} \in \mathbb{R}^3$. På ytan har vi alltså $40 \geq |\bar{u}|^2 \cdot 10$ med likhet omm $\bar{u}$ är en egenvektor med egenvärde 10. Dessa egenvektorer är $t(2,0,1)$, där $t = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$ på ytan.

__Svar__: Största avståndet är 2. Det antas i $\pm \frac{2}{\sqrt{5}}(2,0,1)$.

9. I basen $\underline{f} = ((3,1)\ (-2,3))$ är $F$:s matris $A_{\underline{f}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, så om $T$ betecknar basbytesmatrisen, fås

$$A_{\underline{e}} = TA_{\underline{f}}T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 16 & 18 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}}}$$

10. Antag att $A$ är diagonaliserbar: $A = TDT^{-1}$ där $D$ är en diagonalmatris. För heltal $k \geq 1$ gäller då

$$A^k = 0 \iff TD^kT^{-1} = 0 \iff D^k = 0$$

Om $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, fås

$$\begin{aligned} D^k = 0 &\iff \lambda_1^k = \lambda_2^k = \dots = \lambda_n^k = 0 \\ &\iff \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0 \\ &\iff D = 0 \\ &\iff T^{-1}AT = 0 \\ &\iff A = 0. \end{aligned}$$

$\square$