TATA24 2023-03-14, SVAR OCH LÖSNINGSSKISSER

1) $\frac{\pi}{2}$ 2) $x=4,\ y=25,\ z=-15$ 3) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

4) $\begin{pmatrix} 17 & 39 \\ -5 & -11 \end{pmatrix}$ 5) $a=3$ 6) 0 och 7

7) Låt $\underline{x} = (1\ x\ x^2\ x^3)$. $F(1) = 0 = \underline{x}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $F(x) = x^2+2 = \underline{x}\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ och

$F(x^2) = 2x^3+4x = \underline{x}\begin{pmatrix}0\\4\\0\\2\end{pmatrix}$, så avbildningsmatrisen är $\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&4\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

$V(F)$ spänns upp av $F(1)$, $F(x)$ och $F(x^2)$. $F(1)=0$ är löjlig, medan $F(x)$ och $F(x^2)$ är linjärt oberoende och alltså en bas för $V(F)$. $F(1)=0$, så $1 \in N(F)$. $\dim N(F) = \dim \mathbb{P}_2 - \dim V(F) = 3-2 = 1$, så (1) är en bas för $N(F)$.

Svar. $\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&4\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, (1) samt $(x^2+2\ \ 2x^3+4x)$.

8) $Q(\underline{e}X) = X^t A X$ där $A = \begin{pmatrix}2&0&6\\0&1&0\\6&0&-7\end{pmatrix}$.

$\det(A-\lambda I) = (1-\lambda)(\lambda+10)(\lambda-5)$, så största egenvärdet är 5 och det minsta är -10. De tillhörande egenrummen är $[(2,0,1)]$ respektive $[(-1,0,2)]$. På enhetssfären $|\underline{e}X|=1$ är 5 respektive -10 därför extremvärdena, och de antas där respektive egenrum skär sfären.

Svar. Max: 5, i punkterna $\pm\frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,1)$; min: -10, i $\pm\frac{1}{\sqrt{5}}(-1,0,2)$.

9) Avläsning i systemet visar $U^\perp = [(-1,0,3,0),\ (1,1,7,1)]$.
Gram-Schmidt ger en ortogonal bas $(\bar{b}_1\ \bar{b}_2)$ för $U^\perp$:

$$\bar{b}_1 = (-1,0,3,0)$$

$$\bar{b}_2 = (1,1,7,1) - \frac{(1,1,7,1)\cdot(-1,0,3,0)}{10}(-1,0,3,0) = (3,1,1,1).$$

Projicera: $$\bar{u}_2 = \frac{(3,-2,1,4)\cdot(-1,0,3,0)}{10}(-1,0,3,0) + \frac{(3,-2,1,4)\cdot(3,1,1,1)}{12}(3,1,1,1) =$$

$$= 0\cdot(-1,0,3,0) + 1\cdot(3,1,1,1) = (3,1,1,1).$$

$$\bar{u}_1 = (3,-2,1,4) - \bar{u}_2 = (0,-3,0,3).$$

Svar. $\bar{u}_1 = (0,-3,0,3)$, $\bar{u}_2 = (3,1,1,1)$.

10) $\det(M-\lambda I) = (5-\lambda)(3-\lambda)+1 = (\lambda-4)^2$, så enda egenvärdet är 4.
Egenrummet är endimensionellt och spänns upp av $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, så M är inte diagonaliserbar. Vi byter till en bas med en egenvektor.
Låt (t ex) $T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$. Då är T en ON-matris och $T = T^{-1}$!
Definiera $B = T^{-1}MT = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & -1\\1 & 3\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix}4 & 2\\0 & 4\end{pmatrix}$.
Vi har alltså $B = 4I + C$, där $C = \begin{pmatrix}0 & 2\\0 & 0\end{pmatrix}$.
Eftersom $4I$ kommuterar med C och $C^2 = 0$, ger binomialsatsen

$$B^n = (4I+C)^n = (4I)^n + \binom{n}{1}(4I)^{n-1}C = 4^{n-1}(4I + nC) =$$

$$= 4^{n-1}\begin{pmatrix}4 & 2n\\0 & 4\end{pmatrix}.$$

Slutligen fås $$M^n = TB^nT^{-1} = \frac{1}{2}4^{n-1}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 2n\\0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix} =$$

$$= 4^{n-1}\begin{pmatrix}2 & n+2\\2 & n-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix} = 4^{n-1}\begin{pmatrix}4+n & -n\\n & 4-n\end{pmatrix}$$

Svar $M^n = 4^{n-1}\begin{pmatrix}4+n & -n\\n & 4-n\end{pmatrix}$.