Lösningar till tentamen TATA24 2023-08-18

1. $a = 1/2$, $b = -1/2$ ger de parallella vektorerna $(1/2, -3, -1/2)$ och $(-1, 6, 1)$.

2. $A = (1, 2, 0)$, $B = (-1, 1, 3)$, $\overline{AB} = (-2, -1, 3)$, $\overline{\mathbf{u}} = (0, 2, -1)$, $\overline{\mathbf{n}} = \overline{\mathbf{u}} \times \overline{AB} = (5, 2, 4)$ så planets ekvation blir $5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = D$, insättning av A ger att $D = 9$, så planets ekvation blir $5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 9$.

3. $3 * (3, -5, 2) + 1 * (-3, 6, 2) = (6, -9, 8)$ så koordinaterna är $(3, 1)$.

4. $$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$
   så $(-1, 1)$ och $(-4, 1)$ är egenvektorer från egenrummet med egenvärde noll respektive egenvärde 3.

5. Mha projektionsformeln får vi att $A = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 16 & -4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

6. 6

7. Systemet kan skrivas $X'(t) = AX(t)$, $X(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. A har egenvärden $-2, -3$ och motsvarande egenvektorer $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ så den allmänna lösningen är
   $$X(t) = c_0 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + c_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$
   Insättning av begynnelsevärden ger systemet
   $$\begin{aligned} c_0 + c_1 &= -1 \\ -3c_0 - 4c_1 &= 2 \end{aligned}$$
   med lösning $c_0 = -2$, $c_1 = 1$, så vi får att
   $$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-3t}.$$

8. Låt
   $$Q(x_1 \overline{\mathbf{e}}_1 + x_2 \overline{\mathbf{e}}_2) = -5x_1^2 + 6x_1x_2 + 3x_2^2 = X^t AX$$
   med $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$. Då har A egenvärden $4, -6$, så $\underline{\mathbf{f}}$ anger en ON-bas av normaliserade egenvektorer listade i motsvarande ordning så skrivs
   $$Q = Q(y_1 \overline{\mathbf{f}}_1 + y_2 \overline{\mathbf{f}}_2) = 4y_1^2 - 6y_2^2.$$
   Kurvan $Q = 7$ är alltså en hyperbel som skär y_1-axeln men inte y_2-axeln; det finns två punkter närmast origo, $(y_1, y_2) = \pm(\sqrt{7}/2, 0)$.

   Svar: $d \geq \sqrt{7}/2$.

9. Gram-Schmidt på kolonnvektorerna ger en ON-bas $(\overline{\mathbf{f}}_1, \overline{\mathbf{f}}_2)$ för $V(F)$ med

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{f}}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1, 0)\\ \overline{\mathbf{f}}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, 1)\end{aligned}$$

Dimensionssatsen ger att $\dim(N(F) = 4 - 2 = 2$. Eftersom $N(F)$ är ortogonala komplementet till avbildningsmatrisens radrum, och eftersom $\overline{\mathbf{f}}_1$ och $\overline{\mathbf{f}}_2$ båda är ortogonala mot avbildningsmatrisens samtliga rader, så utgör de (också) en bas för $N(F)$.

10. Vi använder standardbasen $\underline{\mathbf{x}} = (1\ x\ x^2\ x^3)$ för $\mathbb{P}_3$. Till ett polynom

$$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 = \underline{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{x}} C$$

hör då en koordinatmatris $C \in \mathbb{R}^4$. Totaliteten av dessa koordinatmatriser, då $p(x)$ genomlöper $\mathbb{U} \leq \mathbb{P}_3$, bildar då ett delrum $U \leq \mathbb{R}^4$. På samma sätt skapar vi ett delrum $V \leq \mathbb{R}^4$ som beskriver $\mathbb{V} \leq \mathbb{P}_3$. Detta V skärs ut av villkoren $c_0 = c_0 + c_1 + c_2 + c_3 = 0$. Vi skriver U som ett lösningsrum genom att radreducera

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & c_0 \\ 1 & 0 & 1 & c_1 \\ 0 & 3 & 2 & c_2 \\ 1 & -1 & 0 & c_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3c_0 - 2c_1 - 2c_2 \\ 0 & 1 & 0 & 2c_0 - 2c_1 - c_2 \\ 0 & 0 & 1 & -3c_0 + 3c_1 + 2c_2 \\ 0 & 0 & 0 & -c_0 + c_2 + c_3 \end{pmatrix}$$

Vi får att U ges av villkoret $-c_0 + c_2 + c_3 = 0$, så är av dim $4 - 1 = 3$, dvs den uppspännande mängden var en bas. Snittet $U \cap V$ fås som lösningsrum till

$$\begin{aligned} c_0 &= 0 \\ c_0 + c_1 + c_3 + c_4 &= 0 \\ -c_0 + c_2 + c_3 &= 0 \end{aligned}$$

Detta lösningsrum är av dim 1 och spänns upp av $(0, 0, 1, -1)$. Översatt till polynom blir alltså $\mathbb{U} \cap \mathbb{V}$ uppspänt av $x^2 - x^3$.

Svar: $\mathbb{U} \cap \mathbb{V}$ har en bas bestående av elementet $x^2 - x^3$.