TATA24 2024-01-08

SVAR OCH LÖSNINGSSKISSER

1. $x=0, y=4, z=-2$ 2. $\sqrt{6}$ 3. $a \neq -1$

4. 4 5. $-1, 3$ 6. $2+x+x^2$

7. $\det(A-\lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda+1)(\lambda-3)$,
så egenvärdena är -1 och 3.
En egenvektor till -1 är $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ och en till 3 är $\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$.
Med $T = \begin{pmatrix}1&1\\1&5\end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix}-1&0\\0&3\end{pmatrix}$ gäller därför

$$A^n = TD^nT^{-1} = \begin{pmatrix}1&1\\1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^n&0\\0&3^n\end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix}5&-1\\-1&1\end{pmatrix} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{4}\begin{pmatrix}5\cdot(-1)^n - 3^n & (-1)^{n+1} + 3^n \\ 5\cdot(-1)^n - 5\cdot 3^n & (-1)^{n+1} + 5\cdot 3^n\end{pmatrix}}}$$

8. $$\left(\begin{array}{cccc|c}-1&2&0&-1&0\\1&-2&-1&2&0\\1&-2&-3&4&0\\-1&2&0&-1&0\end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccc|c}-1&2&0&-1&0\\0&0&-1&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right).$$

Pivotelement i kol. 1 och 3, så $((-1,1,1,-1)\ (0,-1,-3,0))$ är en bas för $V(F)$. Vidare är lösningarna till $AX=0$ (där A är den givna matrisen) $X = \begin{pmatrix}2t-s\\t\\s\\s\end{pmatrix}$, $s,t\in\mathbb{R}$, så $((2,1,0,0)\ (-1,0,1,1))$ är en bas för $N(F)$.

Gram-Schmidt på $V(F)$-basen:

$\bar{b}_1 = (-1,1,1,-1)$, $\bar{b}_2 = (0,-1,-3,0) - \frac{-4}{4}(-1,1,1,-1) = (-1,0,-2,-1)$.

Gram-Schmidt på $N(F)$-basen:

$\bar{c}_1 = (2,1,0,0)$, $\bar{c}_2 = (-1,0,1,1) - \frac{-2}{5}(2,1,0,0) = \frac{1}{5}(-1,2,5,5)$.

Normering ger ON-baser:

<u>Svar:</u> $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1,0,0)\ \frac{1}{\sqrt{55}}(-1,2,5,5)\right)$ för $N(F)$,

$\left(\frac{1}{2}(-1,1,1,-1)\ \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,0,-2,-1)\right)$ för $V(F)$.

9. Tabellvärdena insatta i ekvationen leder till systemet

$$\begin{cases} a - b + c = -1, \\ c = -4, \\ a + b + c = 4, \\ 4a + 2b + c = 3. \end{cases}$$

Normalekvationen är

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix} 18 & 8 & 6 \\ 8 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \dots \iff \underline{\underline{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ -1 \end{pmatrix}}}$$

10. a) Om F är injektiv och $\bar{u} \neq \bar{0}$, så gäller $F(\bar{u}) \neq F(\bar{0}) = \bar{0}$, så $N(F) = \{\bar{0}\}$.

Omvänt, om $N(F) = \{\bar{0}\}$ och $F(\bar{u}_1) = F(\bar{u}_2)$, så har vi $\bar{0} = F(\bar{u}_1) - F(\bar{u}_2) = F(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)$, så $\bar{u}_1 - \bar{u}_2 \in N(F)$.

Eftersom $N(F) = \{\bar{0}\}$, måste då $\bar{u}_1 = \bar{u}_2$ och F är injektiv. $\square$

b) $\dim N(G) + \dim V(G) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$.

Eftersom $\dim V(G) \leq \dim \mathbb{R}^2 = 2$, måste $\dim N(G) \geq 1$.

Alltså finns $\bar{u} \in \mathbb{R}^3$, $\bar{u} \neq \bar{0}$, så att $\bar{u} \in N(G)$.

$F \circ G(\bar{u}) = F(G(\bar{u})) = F(\bar{0}) = \bar{0}$, så $\bar{u} \in N(F \circ G)$.

Därför gäller $N(F \circ G) \neq \{\bar{0}\}$, så $F \circ G$ är inte injektiv enligt (a). $\square$