TATA24 2024-03-12, SVAR & LÖSNINGSSKISSER

1) En ekvation för ℓ är $(x,y,z)=(-1,1,2)+t(4,3,5)$, $t\in\mathbb{R}$.
Ekvationen $r(1,1,1)+s(1,2,3)=(-1,1,2)+t(4,3,5)$ har lösningen $r=-\frac{4}{3}$, $s=\frac{5}{3}$, $t=\frac{1}{3}$.

<u>Svar</u>: $\left(\frac{1}{3}, 2, \frac{11}{3}\right)$

2) $X=\begin{pmatrix}1-3t\\2+2t\\t\end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$

3) $\bar{a}\times\bar{b}=(3,-2,2)$. <u>Svar</u>: $\frac{1}{\sqrt{17}}(3,-2,2)$ (eller $\frac{-1}{\sqrt{17}}(3,-2,2)$)

---

4) $-1, 0, 1, 5$

5) Med $T=\begin{pmatrix}1&3\\2&-1\end{pmatrix}$ fås $A_{\underline{f}}=T^{-1}A_{\underline{e}}T$. <u>Svar</u>: $\frac{1}{7}\begin{pmatrix}38&16\\-1&-3\end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\10\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. <u>Svar</u>: 5

---

7) $Q(\underline{e}X)=X^tAX$ med $A=\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix}$.
A:s egenvärden är -2 och 4 med egenrum $\left[\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right]$ resp. $\left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]$.
På cirkeln $|\bar{u}|=\sqrt{3}$ gäller därför $-2\cdot 3\leq Q(\bar{u})\leq 4\cdot 3$, och extremvärdena antas där egenrummen skär cirkeln.

<u>Svar</u>: min: -6 antas i $\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(1,-1)$,
max: 12 antas i $\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(1,1)$.

8) $U^\perp=[(1,-1,0,0)]$.
Den vektor i U som ligger närmast $\bar{v}$ är

$$\bar{v}_{/\!/U}=\bar{v}-\bar{v}_{/\!/U^\perp}=(1,-2,3,-4)-\frac{(1,-2,3,-4)\cdot(1,-1,0,0)}{2}(1,-1,0,0)=$$
$$=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},3,-4\right).$$

Eftersom $\bar{v}\neq\bar{v}_{/\!/U}$, ligger $\bar{v}$ inte i U.

<u>Svar</u>: $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},3,-4\right)$

9) Systemet kan skrivas $X'=AX$ med $A=\begin{pmatrix}-4&2&0\\-7&4&-1\\4&-2&0\end{pmatrix}$.
A:s egenvärden är $-2, 0$ och 2 med egenrummen
$\left[\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right]$, $\left[\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right]$ resp. $\left[\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}\right]$.

<u>Svar</u>: $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}e^{-2t}+C_2\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}e^{2t}$, $C_i\in\mathbb{R}$

10) Ortogonal projektion är symmetrisk, så $M=M^t$, så $a=3$, $b=2$.
Värderummet är linjen ℓ, så alla kolonner i M är parallella.
Alltså måste $c=4$, $d=6$, $e=6$, $f=9$.
(Nu har vi hittat enda möjliga M. Det återstår att visa att motsvarande avbildning faktiskt är projektion på linjen som M:s kolonnrum utgör, tex. genom att bestämma basvektorernas projektioner.)

<u>Svar</u>: $(a,b,c,d,e,f)=(3,2,4,6,6,9)$, ℓ: $(x_1,x_2,x_3)=t(1,2,3)$, $t\in\mathbb{R}$