Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Algebra, geometri och diskret matematik

Utbildningskod: TATA24
Modul: TEN1

Tentamen i TATA24 Linjär Algebra

2024-01-08 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.

På del A och B (uppgift 1–6) ska endast svar ges. De ska lämnas på ett gemensamt papper. *Varje uppgift på del A och B ger högst 1 poäng.*

Uppgifterna på del C (uppgift 7–10) ger högst 3 poäng per uppgift, och till dessa krävs fullständiga och välmotiverade lösningar.

För betyg 3/4/5 krävs minst 2 poäng på del A, minst 2 poäng på del B, minst 2/3/4 uppgifter på del C som bedömts med minst 2 poäng vardera, samt minst 8/12/16 poäng totalt.

Godkänd kontrollskrivning *ger 3 poäng på del A (uppgift 1–3) som då inte behöver lösas. Markera detta genom att skriva "G" i rutorna för uppgift 1–3.*

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

Nedan ges $\mathbb{R}^n$ alltid standardskalärprodukten, och standardbasen i $\mathbb{R}^n$ ses som ett höger ON-system när lämpligt.

DEL A

1. Lös ekvationssystemet $\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 2, \\ x - y - z = -2, \\ 2x + 3y + 2z = 8. \end{cases}$

2. Beräkna (det kortaste) avståndet mellan punkten $(2, 1, 3)$ och linjen som har ekvationen $(x_1, x_2, x_3) = (3, -4, 3) + t(0, 2, 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

3. Ange *alla* konstanter $a \in \mathbb{R}$ som uppfyller att de tre vektorerna $(1, 2, 0)$, $(3, 0, 1)$ och $(-2, 2, a)$ i $\mathbb{R}^3$ är linjärt *oberoende*.

DEL B

4. Matrisen $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ har $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ som egenvektor. Vilket egenvärde hör den till?

5. Ange koordinaterna för vektorn $(1, 6)$ i basen $((2, 3)\ \ (1, 3))$ för $\mathbb{R}^2$.

6. För en viss linjär avbildning $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{P}_2$ gäller det att $F((1, 2, 3, 4)) = 1 + x^2$ samt att $F((2, 3, 4, 5)) = 3 + x + 2x^2$. Bestäm $F((1, 1, 1, 1))$.

VÄND!

DEL C

7. Låt $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$. Beräkna A^n för alla positiva heltal n.

8. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ har i standardbasen avbildningsmatrisen

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Ange en ON-bas för nollrummet $N(F)$ och en ON-bas för värderummet $V(F)$.

9. Finn de konstanter $a, b, c \in \mathbb{R}$ som gör att ekvationen $y = ax^2 + bx + c$ i minstakvadrat-mening ansluter bäst till värdena i följande tabell:

x	-1	0	1	2
y	-1	-4	4	3

10. (a) Visa att en linjär avbildning F är injektiv om och endast om $N(F) = \{\mathbf{0}\}$. (Kom ihåg att F kallas *injektiv* om $F(\mathbf{u}_1) = F(\mathbf{u}_2)$ medför $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$.)

    (b) Antag att $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ och $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ är linjära. Visa att den sammansatta avbildningen $F \circ G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ inte är injektiv.

LYCKA TILL!