Dagens ämnen

- Matriser
  - Räkneoperationer och räknelagar
- Linjära ekvationssystem och matriser
  - Matrisform av ekvationssystem
  - Elementära radoperationer
  - Trappstegsmatriser, rang och lösningsstruktur
- Matrisinvers, matrisekvationer

Många, fast enkla, begrepp. Läs ”glosorna”, dvs definitionerna!

Matriser

- En matris är ett rektangulärt schema av tal ordnade i r rader och k kolonner:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rk} \end{pmatrix}$$

Räkneoperationer på matriser

Likhet: Låt $A = (a_{ij})_{r\times k}$ och $B = (b_{ij})_{r\times k}$. Vi säger att $A = B$ om

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \text{för alla} \quad i, j: \ 1 \le i \le r, \ 1 \le j \le k,$$

d v s två matriser är lika om de har samma format och elementen är lika position för position.

Addition: Låt $A = (a_{ij})_{r\times k}$ och $B = (b_{ij})_{r\times k}$ vara två matriser av *samma format*, $r\times k$. Summan av A och B definieras som

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1k}+b_{1k} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2k}+b_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1}+b_{r1} & a_{r2}+b_{r2} & \dots & a_{rk}+b_{rk} \end{pmatrix} = (a_{ij}+b_{ij})_{r\times k},$$

d v s matrisernas element adderas position för position.

Räkneregler

(a) Låt A, B, C vara matriser av samma format. För addition mellan matriser gäller

1. $A+B=B+A$
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$
3. Det finns en matris av varje typ $r\times k$ som kallas nollmatrisen och tecknas 0 sådan att för alla $r\times k$-matriser gäller

$$A+0=A$$

4. Till varje $r\times k$-matris finns en $r\times k$-matris A' sådan att

$$A+A'=0$$

Multiplikation med reellt tal: Låt $A = (a_{ij})_{r\times k}$ och $\lambda \in \mathbb{R}$. Produkten av λ och A definieras som

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{r\times k} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1k} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{r1} & \lambda a_{r2} & \dots & \lambda a_{rk} \end{pmatrix},$$

d v s samtliga matriselement multipliceras med talet λ.

Räkneregler

(b) För multiplikation med reella tal gäller

1. $1\cdot A=A$
2. $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$
3. $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$
4. $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$

för alla matriser A och B av samma format och $\lambda, \mu\in R$.

Matrismultiplikation: Låt $A = (a_{ij})_{r\times m}$ vara en $r\times m$-matris och $B = (b_{ij})_{m\times k}$ en $m\times k$-matris. Då definieras produkten av A och B som $r\times k$-matrisen $C = (c_{ij})_{r\times k}$ där

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{im}b_{mj}.$$

????

- http://users.mai.liu.se/hanlu09/matrix/

Räkneregler

(c) För multiplikation gäller

1. $(AB)C=A(BC)$
2. $(\lambda A)B= A(\lambda B)= \lambda(AB)$
3. $A(B+C)=AB+AC$
4. $(B+C)A=BA+CA$

för alla $\lambda \in R$ och alla matriser A, B och C för vilka respektive operationer är definierade.

$$\underset{r\times m}{A} \cdot \underset{m\times k}{B} = \underset{r\times k}{C}$$

Transponat

Definition 3.2.10. Låt $A = (a_{ij})_{r\times k}$ vara en $r\times k$-matris. $k\times r$-matrisen $A^t = (a^t_{ji})_{k\times r}$ kallas transponatet av A och definieras ur A genom att

$$a^t_{ji} = a_{ji} \quad \text{för alla } i, j: \quad 1 \le i \le r, \quad 1 \le j \le k.$$

????

Rad blir kolonn och kolonn blir rad

Definition 3.2.12. En matris A kallas *symmetrisk* om $A = A^t$.

Räknelagar för transponering

För alla matriser A och B, sådana att operationerna nedan är definierade, gäller:

(a) $(A+B)^t = A^t + B^t$

(b) $(\lambda A)^t = \lambda\left(A^t\right)$ *för alla reella tal* λ

(c) $\left(A^t\right)^t = A$

(d) $(AB)^t = B^t A^t$

Elementära radoperationer

(a) Multiplicera ekvation med nollskild konstant

(b) Byta plats på två ekvationer

(c) Addera *konst*(ekvation)* till *annan ekvation*

(a) Multiplicera rad med nollskild konstant

(b) Byta plats på två rader

(c) Addera *konst*(rad)* till *annan rad*

Radekvivalens

Om matrisen B erhålls efter ändligt många radoperationer på matrisen A så säges A och B vara radekvivalenta. Att A och B är radekvivalenta skrivs

$$A \sim B$$

Sats 3.4.2

Om två ekvationssystem har radekvivalenta totalmatriser så är systemens lösningsmängder identiska.

Definition 3.5.1. (a) Ett element a_{ij} i matrisen A kallas *pivotelement* om

$$a_{ij} \neq 0 \text{ och } a_{\mu\nu} = 0 \text{ för } \mu \geq i,\ \nu \leq j \text{ och } (\mu, \nu) \neq (i, j).$$

(b) En matris T kallas *trappstegsmatris* om alla nollskilda rader står ovanför alla nollrader och om varje nollskild rad har ett pivotelement.

(a) Pivotelementet a_{ij}

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & a_{ij} & \dots \\ & & & 0 & \dots \\ & \mathbf{0} & & \vdots & \\ & & & 0 & \end{pmatrix}$$

(b) Trappstegsmatris

$$\begin{pmatrix} \neq 0 & & & \\ & \neq 0 & & \\ & & \neq 0 & \\ & \mathbf{0} & & \end{pmatrix}$$

Ej trappstegsmatris

$$\begin{pmatrix} 0 & \neq 0 & & \\ 0 & \dots & 0 & \neq 0 \\ 0 & 0 & \neq 0 & \\ & \mathbf{0} & & \end{pmatrix}$$

Sats 3.5.2

(a) Varje $r \times k$-matris är radekvivalent med minst en trappstegsmatris.

(b) Om T_1 och T_2 är trappstegsmatriser och $T_1 \sim T_2$ *så har* T_1 och T_2 lika många nollskilda rader.

Rang (Definition 3.5.3)

Låt A vara en matris och T en trappstegsmatris sådan att $A \sim T$. Om T har n st nollskilda rader så säges A har rang n och vi skriver rang $A = n$.

Lösningsstruktur och rang

(a) Entydig lösning

rang(koeff)=rang(total)=antal variabler

(b) Ingen lösning

rang(koeff)<rang(total)

(c) Oändligt många

rang(koeff)=rang(total)<antal variabler

Homogena system (nollor i H.L.)

- Homogena system är alltid lösbara (alla variabler =0 är alltid en lösning och kallas *den triviala lösningen*)
- Homogena system med fler variabler än ekvationer har alltid oändligt många lösningar

Linjära ekvationssystem

- För ett linjärt ekvationssystem gäller exakt ett av följande alternativ:
  - Systemet har entydig lösning
  - Systemet har ingen lösning
  - Systemet har oändligt många lösningar

Matrisinvers (Definition 3.6.1)

En kvadratisk matris A kallas inverterbar om det finns en matris B så att

$$AB=BA=I$$

B kallas A:s invers och betecknas A^{-1}.

När finns invers (Sats 3.6.2)

Låt A vara en $n\times n$-matris. Följande påståenden är ekvivalenta

(a) A är inverterbar

(b) Matrisekvationen $AX=Y$ har entydig lösning för alla $n\times 1$-matriser Y.

(c) Matrisekvationen $AX=0$ har endast den triviala lösningen, $X=0$.

(d) Rang $A=n$

(e) A är radekvivalent med enhetsmatrisen

Korollarium 3.6.3

Kan formulera om (b) i sats 3.6.2 som

(b) Matrisekvationen $AX=Y$ har entydig lösning för alla $n\times 1$-matriser Y.

(b) Matrisekvationen $AX=Y$ har entydig lösning för alla $n\times k$-matriser Y och lösningen är $X=A^{-1}Y$.

Räkneregler (Sats 3.6.6)

Låt A och B vara inverterbara $n\times n$-matriser. Då gäller

(a) $(A^{-1})^{-1}=A$

(b) $(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$

(c) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

(d) $(A^n)^{-1}=(A^{-1})^n$ för alla heltal $n\geq 1$