Dagens ämnen

- Determinanten
  - Definition och grundläggande egenskaper
- Radoperationers påverkan på determinanten
  - Beräkning av determinanten för en trappstegsmatris
- Utveckling efter rad eller kolonn
  - Kofaktorer
- Geometriska tolkningar

Determinantdefinitionen, steg för steg

Definition 4.2.1. En *tillåten produkt* ur en $n \times n$-matris A är en produkt av n st element ur A där ingen av faktorerna i produkten står i samma rad eller samma kolonn i A som någon av de andra faktorerna i produkten.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxed{a_{13}} & a_{14} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \boxed{a_{34}} \\ a_{41} & \boxed{a_{42}} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Tillåten produkt

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \boxed{a_{34}} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Otillåten produkt

Negativa par

Definition 4.2.2. Ett *negativt par* ur en tillåten produkt $a_{1p_1}a_{2p_2}\dots a_{np_n}$ är ett par av faktorer $a_{ip_i}a_{jp_j}$ där $i < j$ men $p_i > p_j$.

Radindex: $i<j$, dvs rad i är ovanför rad j

Kolonnindex: $p_i>p_j$, dvs

kolonn p_i är till höger om kolonn p_j

Negativt par: Tänk ovanför till höger

$$a_{jp_j} \rightarrow a_{ip_i}$$

Tecknet för en tillåten produkt

Definition 4.2.4. *Tecknet* för den tillåtna produkten $a_{1p_1}a_{2p_2}\dots a_{np_n}$ ges av

$$(-1)^{N(p_1,p_2,\dots,p_n)}$$

där $N(p_1, p_2, \dots, p_n) =$ antalet negativa par i $a_{1p_1}a_{2p_2}\dots a_{np_n}$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxed{a_{13}} & a_{14} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \boxed{a_{34}} \\ a_{41} & \boxed{a_{42}} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Totalt 3 negativa par

Tecknet $= (-1)^3 = -1$

Definition av determinant

Definition 4.2.6. Låt A vara en $n \times n$-matris. *Determinanten* av A, det A definieras som summan av de tillåtna produkterna inklusive deras tecken, d v s

$$\det A = \sum (-1)^{N(p_1, p_2, \ldots, p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \ldots a_{np_n}.$$

Elementära radoperationer

(a) Multiplicera rad med nollskild konstant

(b) Byta plats på två rader

(c) Addera *konst*(rad)* till *annan rad*

(a) Hela determinanten multipliceras med konstanten

(b) Determinanten byter tecken

Spaltning

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} \\ \boxed{a_{21} + b_{21}} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} \\ \boxed{b_{21}} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} \end{pmatrix}$$

$$a_{12}(a_{21} + b_{21})a_{33} = a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}b_{21}a_{33}$$

TP ur B = TP ur A_1 + TP ur A_2

Elementära radoperationer

(a) Multiplicera rad med nollskild konstant

(b) Byta plats på två rader

(c) Addera *konst*(rad)* till *annan rad*

(a) Hela determinanten multipliceras med konstanten

(b) Determinanten byter tecken

(c) Determinanten ändras ej

Sammanfattning

- $\det A = \det A^t$. **Sats 4.4.1**
- Rad(kolonn)byte ger teckenbyte. **Sats 4.3.1**
- Två rader (kolonner) är lika $\Rightarrow$ determinanten är 0. **Korollarium 4.3.2**
- Multiplikation av rad (kolonn) med $k \neq 0 \iff$ ursprungliga determinanten multipliceras med k. **Sats 4.3.3**
- Spaltning (uppdelning) längs rad (kolonn) $\iff$ determinanterna adderas. **Sats 4.3.4**
- Radoperationen rad + *konstant*·(annan rad) ändrar ej determinanten.
- Kolonnoperationen kolonn + *konstant*·(annan kolonn) ändrar ej determinanten.

Kofaktorer

Definition 4.7.1. Låt A vara en $n \times n$-matris och låt $(n-1)\times(n-1)$-matrisen A_{ij} vara den matris som fås då rad i och kolonn j stryks ur A. Då kallas $M_{ij} = \det A_{ij}$ *minoren* till elementet a_{ij} och $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ kallas *kofaktorn* till elementet a_{ij}.

$$A = \begin{pmatrix} \text{[redacted]} & \\ 21 & 23 \\ 31 & 33 \end{pmatrix} \qquad A_{12} = \begin{pmatrix} 21 & 23 \\ 31 & 33 \end{pmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 21 & 23 \\ 31 & 33 \end{vmatrix}$$

Utveckling efter rad (kolonn)

Sats 4.7.3. *Låt A vara en $n \times n$-matris. Då gäller att*

$$\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in} \qquad \textit{Utveckling efter rad } i$$
$$\det A = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \ldots + a_{nj}C_{nj} \qquad \textit{Utveckling efter kolonn } j$$

Determinanter och ekvationssystem

Determinanten för radekvivalenta matriser

Sats 4.4.5. *Låt A och B vara $n \times n$-matriser sådana att $A \sim B$. Då finns ett tal $k \neq 0$ som endast beror av vilka rad- och kolonnoperationer som utförts, sådant att*

$$\det A = k \cdot \det B.$$

Konsekvens: Om $A \sim T$, T trappstegsmatris, och $\det(T) \neq 0$ så är även $\det(A) \neq 0$ och tvärtom

Sats 3.6.2

Låt A vara en $n \times n$-matris. Följande påståenden är ekvivalenta

(a) A är inverterbar

(b) Matrisekvationen $AX=Y$ har entydig lösning för alla $n \times 1$-matriser Y.

(c) Matrisekvationen $AX=0$ har endast den triviala lösningen, $X=0$.

(d) Rang $A=n$

(e) A är radekvivalent med enhetsmatrisen

Sats 4.5.1

Låt A vara en $n \times n$-matris. Följande påståenden är ekvivalenta

(a) $\det(A) \neq 0$

(b) A är inverterbar

(c) Matrisekvationen $AX=Y$ har entydig lösning för alla $n \times 1$-matriser Y.

(d) Matrisekvationen $AX=0$ har endast den triviala lösningen, $X=0$.

(e) Rang $A=n$

(f) A är radekvivalent med enhetsmatrisen

Determinantkriteriet, Korollarium 4.5.2

(a) $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow$ Ekvationssystemet $AX=Y$ är entydigt lösbart för alla högerled Y.

Negera påståendet i (a)

(b) $\det(A)=0 \Leftrightarrow$ $AX=Y$ saknar lösning eller har oändligt många lösningar.

Produktlagen

Sats 4.6.1. *Låt A och B vara $n \times n$-matriser. Då gäller att*

$$\det AB = \det A \cdot \det B.$$

Konsekvens:

Korollarium 4.6.2. *Låt A vara en inverterbar $n \times n$-matris. Då gäller att*

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Geometriska tolkningar

- Vektorprodukten kan skrivas som en determinant

$$\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \mathbf{e}_1\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} - \mathbf{e}_2\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} + \mathbf{e}_3\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

Area och volym som determinant

- Area av parallellogram i planet

$$A = |\mathbf{u}\times\mathbf{v}| = \left\| \begin{matrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x_1 & x_2 & 0 \\ y_1 & y_2 & 0 \end{matrix} \right\| = \begin{bmatrix} \text{Utv. efter} \\ \text{kolonn 3} \end{bmatrix} = \left| \mathbf{e}_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right| = \left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{matrix} \right\|$$

- Även volymprodukten kan skrivas som en determinant

$$V = |(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\bullet\mathbf{w}| = \left| \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right| =$$

$$= \left| \left(\mathbf{e}_1 \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} - \mathbf{e}_2 \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} + \mathbf{e}_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right) \bullet \left(z_1\mathbf{e}_1 + z_2\mathbf{e}_2 + z_3\mathbf{e}_3 \right) \right| =$$

$$= \left| z_1 \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} - z_2 \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right| = \left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{matrix} \right\|.$$

Några kuriosa-satser

Sats 4.7.5. (Cramers regel) *Låt A vara en $n\times n$-matris med $\det A \neq 0$, B en $n\times 1$-matris och betrakta ekvationssystemet $AX = B$. Låt A_i vara den matris som erhålls då kolonn i ur A ersätts med B. Då ges den entydiga lösningen till ekvationssystemet av*

$$X = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \det A_1 \\ \det A_2 \\ \vdots \\ \det A_n \end{pmatrix}.$$

Några kuriosa-satser

Sats 4.7.6. *Låt A vara en inverterbar $n\times n$-matris. Låt $\tilde{A}$ vara A:s matris av kofaktorer, d v s elementet $\tilde{a}_{ij}$ ur $\tilde{A}$ är kofaktorn C_{ij} från A. Då gäller att*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}^t.$$

För 2×2-matriser ger detta följande enkla minnesregel:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

d v s vi inverterar en 2×2-matris genom att byta plats på elementen på huvuddiagonalen, byta tecken på de andra två och dividera med matrisens determinant. Med lite övning kan man också använda sats 4.7.6 på 3×3-matriser.