Dagens ämnen

- Vektorrum
  - Definitionen
- Underrum
- Linjärt hölje
  - Generera, spänna upp
- Satsen om löjliga element
  - Bli av med det som ej behövs
- Linjärt (o)beroende

Definition 5.2.1 En icke-tom mängd $\mathbb{V}$ säges vara ett vektorrum över de reella talen om följande gäller

I. Det finns i $\mathbb{V}$ en operation kallad addition, betecknad + sådan att

$$\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{V} \Rightarrow \mathbf{u}+\mathbf{v}\in\mathbb{V}$$

För $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{V}$ har denna addition egenskaperna

ADD 1. $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$

ADD 2. $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$

ADD 3. Finns $\mathbf{0}$ i $\mathbb{V}$ sådan att $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$ för alla $\mathbf{u}$ i $\mathbb{V}$

ADD 4. För varje $\mathbf{u}$ i $\mathbb{V}$ finns ett element $-\mathbf{u}$ så att $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$

II. Det finns i V en operation kallad multiplikation med tal, betecknad $\cdot$ sådan att

$$\lambda\in\mathbb{R},\ \mathbf{u}\in\mathbb{V} \Rightarrow \lambda\cdot\mathbf{u}\in\mathbb{V}$$

För $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ och $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{V}$ har denna multiplikation egenskaperna

MULT 1. $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$

MULT 2. $\lambda(\mu\mathbf{u})=(\lambda\mu)\mathbf{u}$

MULT 3. $(\lambda+\mu)\mathbf{u}=\lambda\mathbf{u}+\mu\mathbf{u}$

MULT 4. $\lambda(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\lambda\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v}$

Exempel på vektorrum

1. $\mathbb{V}$=Reella talen
2. $\mathbb{V}$={Vektorer i planet}
3. $\mathbb{V}$={Vektorer i rummet}
4. $\mathbb{V}$={rxk-matriser}=$\mathbb{M}_{rk}$
5. $\mathbb{V}$={Polynom}=$\mathbb{P}_\infty$
6. I=intervall $\subset\mathbb{R}$, $\mathbb{V}=\{f{:}I\rightarrow\mathbb{R}\}$

Definition 5.3.1, sid 104 Underrum

En icke-tom delmängd $\mathbb{U}$ av ett vektorrum $\mathbb{V}$ kallas ett ***underrum*** av $\mathbb{V}$ om $\mathbb{U}$ själv är ett vektorrum med den addition och multiplikation med tal som definierats i $\mathbb{V}$.

Varför då??

Slipper kontrollera alla 10 villkoren!

Sats 5.3.2, sid 105. Låt $\mathbb{U}$ vara en icke-tom delmängd av ett vektorrum $\mathbb{V}$. Då är $\mathbb{U}$ ett underrum av $\mathbb{V}$ omm

I. $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{U} \Rightarrow \mathbf{u}+\mathbf{v}\in\mathbb{U}$

ADD 1. $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$

ADD 2. $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$

ADD 3. Finns $\mathbf{0}$ i $\mathbb{U}$ sådan att $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$ för alla $\mathbf{u}$ i $\mathbb{U}$

ADD 4. För varje $\mathbf{u}$ i $\mathbb{U}$ finns ett element $-\mathbf{u}$ så att $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$

II. $\lambda\in\mathbb{R}$, $\mathbf{u}\in\mathbb{U} \Rightarrow \lambda\mathbf{u}\in\mathbb{U}$

MULT 1. $\lambda(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\lambda\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v}$

MULT 2. $(\lambda+\mu)\mathbf{u}=\lambda\mathbf{u}+\mu\mathbf{u}$

MULT 3. $\lambda(\mu\mathbf{u})=(\lambda\mu)\mathbf{u}$

MULT 4. $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$

Exempel på underrum

1. Linje genom origo i planet (rummet) är underrum av $\mathbf{R}^2$.
2. Plan genom origo i rummet är underrum av $\mathbf{R}^3$.
3. $\mathbb{P}_n=\{p(x)\colon \deg(p(x))\leq n\}$ är underrum av $\mathbb{P}_\infty$.
4. Lösningsmängden till det homogena linjära ekvationssystemet $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ i n obekanta är ett underrum av $\mathbf{R}^n$.

Snabbtest

- Om $\mathbb{U}$ är ett underrum av $\mathbb{V}$ så gäller att $\mathbf{0}\in\mathbb{U}$.
- Om $\mathbf{0}\notin\mathbb{U}$ så är $\mathbb{U}$ inget underrum

Definition 5.3.8, sid 108.

Låt $\mathbb{V}$ vara ett vektorrum och $M=\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset \mathbb{V}$. Låt $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Då kallas

$$\lambda_1\mathbf{v}_1+\lambda_2\mathbf{v}_2+\ldots+\lambda_n\mathbf{v}_n$$

en *linjärkombination* av M.

Mängden av *alla* linjärkombinationer av M kallas *linjära höljet* av M och betecknas $[M]$ alternativt $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n]$.

Sats 5.3.16 (Satsen om löjliga element)

Låt $\mathbb{V}$ vara ett vektorrum och antag att

$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_n \in \mathbb{V}$. Då gäller

$\mathbf{v}_n \in [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}] \Rightarrow$

$$\Rightarrow [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_n] = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}],$$

dvs om någon av de genererande vektorerna är en linjärkombination av de andra så kan den strykas utan att höljet ändras

Definition 5.4.1, sid 113. Linjärt (o)beroende

Låt $\mathbb{V}$ vara ett vektorrum och $M=\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset \mathbb{V}$. Ekvationen

$$\lambda_1\mathbf{v}_1+\lambda_2\mathbf{v}_2+\ldots+\lambda_n\mathbf{v}_n=\mathbf{0},$$

där de obekanta $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ söks, kallas *beroendeekvationen*. Om beroendeekvationen har *fler lösningar* än $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$ säges mängden M vara ***linjärt beroende***.

Om $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$ är *den enda lösningen* säger vi att M är ***linjärt oberoende***.

Exempel på linjärt (o)beroende

1. Två icke-parallella vektorer är linjärt oberoende.
2. Två parallella vektorer är linjärt beroende.
3. Tre vektorer i samma plan är linjärt beroende.
4. Fyra (eller fler) vektorer i $\mathbf{R}^3$ är linjärt beroende
5. Standardbasvektorerna i $\mathbf{R}^n$ är linjärt oberoende.
6. Fler än n st vektorer i $\mathbf{R}^n$ är linjärt beroende.

Sats 5.4.4, sid 114

Låt $\mathbb{V}$ vara ett vektorrum och $M=\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset \mathbb{V}$. Då gäller

M är linjärt beroende

$\Leftrightarrow$

M innehåller minst ett löjligt element