Exempel 7

Låt $a, b \in \mathbb{R}$

Exempel 7

Låt $a, b \in \mathbb{R}$ och $A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b & b \\ b & a & \dots & b & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & \dots & a & b \\ b & b & \dots & b & a \end{pmatrix}$.

Exempel 7

Låt $a, b \in \mathbb{R}$ och $A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b & b \\ b & a & \dots & b & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & \dots & a & b \\ b & b & \dots & b & a \end{pmatrix}$. Beräkna $\det A$.

Exempel 7

Låt $a, b \in \mathbb{R}$ och $A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b & b \\ b & a & \dots & b & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & \dots & a & b \\ b & b & \dots & b & a \end{pmatrix}$. Beräkna $\det A$.

Lösning: Alla kolonnerna innehåller ett a

Exempel 7

Låt $a, b \in \mathbb{R}$ och $A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b & b \\ b & a & \dots & b & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & \dots & a & b \\ b & b & \dots & b & a \end{pmatrix}$. Beräkna $\det A$.

Lösning: Alla kolonnerna innehåller ett a och $n-1$ st. b:n.

Exempel 7

Låt $a, b \in \mathbb{R}$ och $A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b & b \\ b & a & \dots & b & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & \dots & a & b \\ b & b & \dots & b & a \end{pmatrix}$. Beräkna $\det A$.

Lösning: Alla kolonnerna innehåller ett a och $n-1$ st. b:n. Om vi adderar de $n-1$ första raderna till den sista så fås

Exempel 7

Låt $a, b \in \mathbb{R}$ och $A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b & b \\ b & a & \dots & b & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & \dots & a & b \\ b & b & \dots & b & a \end{pmatrix}$. Beräkna $\det A$.

Lösning: Alla kolonnerna innehåller ett a och $n-1$ st. b:n. Om vi adderar de $n-1$ första raderna till den sista så fås

$$\det A \overset{\substack{r_n+r_1 \\ r_n+r_2 \\ \vdots}}{=}$$

Exempel 7

Låt $a, b \in \mathbb{R}$ och $A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b & b \\ b & a & \dots & b & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & \dots & a & b \\ b & b & \dots & b & a \end{pmatrix}$. Beräkna det A.

Lösning: Alla kolonnerna innehåller ett a och $n-1$ st. b:n. Om vi adderar de $n-1$ första raderna till den sista så fås

$$\det A \overset{\substack{r_n+r_1 \\ r_n+r_2 \\ \vdots}}{=} \begin{vmatrix} a & b & \dots & b & b \\ b & a & \dots & b & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & \dots & a & b \end{vmatrix}$$

Exempel 7

Låt $a, b \in \mathbb{R}$ och $A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b & b \\ b & a & \dots & b & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & \dots & a & b \\ b & b & \dots & b & a \end{pmatrix}$. Beräkna det A.

Lösning: Alla kolonnerna innehåller ett a och $n-1$ st. b:n. Om vi adderar de $n-1$ första raderna till den sista så fås

$$\det A \overset{\substack{r_n+r_1 \\ r_n+r_2 \\ \vdots}}{=} \begin{vmatrix} a & b & \dots & b & b \\ b & a & \dots & b & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & \dots & a & b \\ a+(n-1)b & a+(n-1)b & \dots & a+(n-1)b & a+(n-1)b \end{vmatrix}.$$

Exempel 7

Låt $a, b \in \mathbb{R}$ och $A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b & b \\ b & a & \dots & b & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & \dots & a & b \\ b & b & \dots & b & a \end{pmatrix}$. Beräkna det A.

Lösning: Alla kolonnerna innehåller ett a och $n-1$ st. b:n. Om vi adderar de $n-1$ första raderna till den sista så fås

$$\det A \overset{\substack{r_n+r_1 \\ r_n+r_2 \\ \vdots}}{=} \begin{vmatrix} a & b & \dots & b & b \\ b & a & \dots & b & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & \dots & a & b \\ a+(n-1)b & a+(n-1)b & \dots & a+(n-1)b & a+(n-1)b \end{vmatrix}.$$

Om vi bryter ut den gemensamma faktorn $a + (n-1)b$ från sista raden

Exempel 7

Låt $a, b \in \mathbb{R}$ och $A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b & b \\ b & a & \dots & b & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & \dots & a & b \\ b & b & \dots & b & a \end{pmatrix}$. Beräkna det A.

Lösning: Alla kolonnerna innehåller ett a och $n-1$ st. b:n. Om vi adderar de $n-1$ första raderna till den sista så fås

$$\det A \overset{\substack{r_n+r_1 \\ r_n+r_2 \\ \vdots}}{=} \begin{vmatrix} a & b & \dots & b & b \\ b & a & \dots & b & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & \dots & a & b \\ a+(n-1)b & a+(n-1)b & \dots & a+(n-1)b & a+(n-1)b \end{vmatrix}.$$

Om vi bryter ut den gemensamma faktorn $a + (n-1)b$ från sista raden och sedan subtraherar sista kolonnen från de övriga så fås

Exempel 7

$\det A =$

Exempel 7

$$\det A = (a + (n-1)b)$$

Exempel 7

$$\det A = (a + (n-1)b) \begin{vmatrix} a & b & \dots & b & b \\ b & a & \dots & b & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & \dots & a & b \\ & & & & \end{vmatrix}$$

Exempel 7

$$\det A = (a + (n-1)b) \begin{vmatrix} a & b & \dots & b & b \\ b & a & \dots & b & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & \dots & a & b \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Exempel 7

$$\det A = (a + (n-1)b) \begin{vmatrix} a & b & \dots & b & b \\ b & a & \dots & b & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & \dots & a & b \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{k_1 - k_n \\ k_2 - k_n \\ \vdots}}{=}$$

Exempel 7

$$\det A = (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} a & b & \dots & b & b \\ b & a & \dots & b & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & \dots & a & b \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{k_1-k_n \\ k_2-k_n \\ \vdots}}{=}$$

$$= (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} & & & & b \\ & & & & b \\ & & & & \\ & & & & b \\ & & & & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=$$

Exempel 7

$$\det A = (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} a & b & \dots & b & b \\ b & a & \dots & b & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & \dots & a & b \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{k_1-k_n \\ k_2-k_n \\ \vdots}}{=}$$

$$= (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} a-b & & & & b \\ 0 & & & & b \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & b \\ 0 & & & & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=$$

Exempel 7

$$\det A = (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} a & b & \dots & b & b \\ b & a & \dots & b & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & \dots & a & b \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{k_1-k_n \\ k_2-k_n \\ \vdots}}{=}$$

$$= (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} a-b & 0 & & b \\ 0 & a-b & & b \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & & b \\ 0 & 0 & & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=$$

Exempel 7

$$\det A = (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} a & b & \dots & b & b \\ b & a & \dots & b & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & \dots & a & b \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{k_1-k_n \\ k_2-k_n \\ \vdots}}{=}$$

$$= (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} a-b & 0 & \dots & b \\ 0 & a-b & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & b \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=$$

Exempel 7

$$\det A = (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} a & b & \dots & b & b \\ b & a & \dots & b & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & \dots & a & b \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{k_1-k_n \\ k_2-k_n \\ \vdots}}{=}$$

$$= (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} a-b & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & a-b & \dots & 0 & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a-b & b \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=$$

Exempel 7

$$\det A = (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} a & b & \dots & b & b \\ b & a & \dots & b & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & \dots & a & b \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{k_1-k_n \\ k_2-k_n \\ \vdots}}{=}$$

$$= (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} a-b & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & a-b & \dots & 0 & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a-b & b \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a+(n-1)b)$$

Exempel 7

$$\det A = (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} a & b & \dots & b & b \\ b & a & \dots & b & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & \dots & a & b \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{k_1-k_n \\ k_2-k_n \\ \vdots}}{=}$$

$$= (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} a-b & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & a-b & \dots & 0 & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a-b & b \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}$$