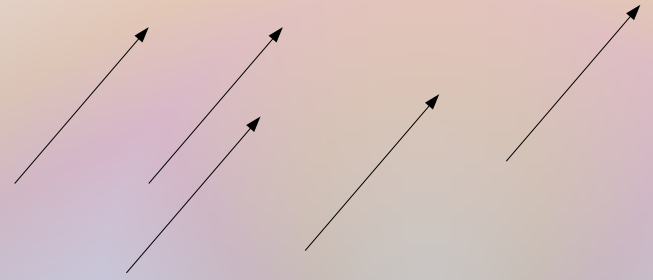
En vektor är mängden av *alla* sträckor med samma längd och riktning.



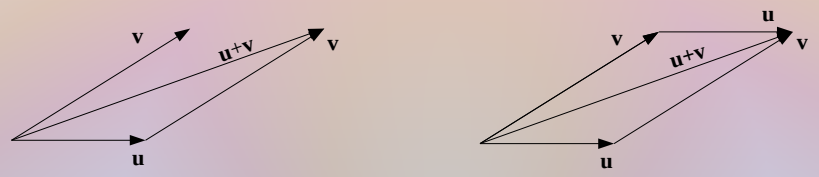
Slappdefinition

- En vektor är en riktad sträcka som får parallellförflyttas.

  Tänk på vektorn som en pil.
- Betecknar vektorer med små bokstäver i **fetstil, u**, **v**, **w** i boken och med små bokstäver med streck över $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ när vi skriver för hand

Räkning med vektorer

- Addition:
  - Placera pilarna spets mot ända
  - Förbind fri ända med fri spets



$\because$ **u+v=v+u**

Bas och koordinater

Målsättning: Uttrycka alla vektorer i planet/rummet med ett fåtal givna genom så kallade

linjärkombinationer

Definition 2.3.1 En ordnad uppsättning vektorer i planet (rummet) kallas en bas om varje vektor i planet (rummet) kan skrivas som en linjärkombination av de givna på precis ett sätt

Sats 2.3.2

Planet: Räcker med två icke-parallella

Rummet: Duger med tre som ej ligger i samma plan

Kom ihåg!!

- Vektoradditionside'n: “spets mot ända”.
- Projektionsformeln: $\mathbf{v}_{\parallel \mathbf{u}} = \dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2}\mathbf{u}$.
- Vektorer är ortogonala (vinkelräta) om deras skalärprodukt är 0.

Vektorprodukt (kryssprodukt)

(a) är ortogonal mot dem vi ”kryssar”

(b) |**kryssprodukten**| = arean av den parallellogram vektorerna spänner upp

(c) **u**, **v** och **u**×**v** är ett högersystem.

Linjer

- Punkt + riktning (planet/rummet)
- Punkt + normal (endast planet)
- Punkt + riktningskoefficient (endast i planet)

Plan

- Tre punkter (ej på samma linje)
- Två riktningar + punkt
- Normalriktning + punkt

Att kunna

- Vektorräkning grafiskt och koordinatform
- Skalärprodukt och ortogonalprojektion
- Vektorprodukt
- Linjer och plan, representationsformer, avståndsberäkningar, projektioner och spegelpunkter

Elementära radoperationer

(a) Multiplicera ekvation med nollskild konstant

(b) Byta plats på två ekvationer

(c) Addera *konst*(ekvation)* till *annan ekvation*

(a) Multiplicera rad med nollskild konstant

(b) Byta plats på två rader

(c) Addera *konst*(rad)* till *annan rad*

Radekvivalens

Om matrisen B erhålls efter ändligt många radoperationer på matrisen A så säges A och B vara radekvivalenta. Att A och B är radekvivalenta skrivs

$$A \sim B$$

Trappstegsmatriser

Definition 3.5.1. (a) Ett element a_{ij} i matrisen A kallas *pivotelement* om

$$a_{ij} \neq 0 \text{ och } a_{\mu\nu} = 0 \text{ för } \mu \geq i,\ \nu \leq j \text{ och } (\mu,\nu) \neq (i,j).$$

(b) En matris T kallas *trappstegsmatris* om alla nollskilda rader står ovanför alla nollrader och om varje nollskild rad har ett pivotelement.

(a) Pivotelementet a_{ij}

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & a_{ij} & \dots \\ & & & 0 & \dots \\ & 0 & & \vdots & \\ & & & 0 & \end{pmatrix}$$

(b) Trappstegsmatris

$$\begin{pmatrix} \neq 0 & & & \\ & \neq 0 & & \\ & & \neq 0 & \\ & 0 & & \end{pmatrix}$$

Ej trappstegsmatris

$$\begin{pmatrix} 0 & \neq 0 & & \\ 0 & \dots & 0 & \neq 0 \\ 0 & 0 & \neq 0 & \\ & 0 & & \end{pmatrix}$$

Linjära ekvationssystem

- För ett linjärt ekvationssystem gäller exakt ett av följande alternativ:
  - Systemet har entydig lösning
  - Systemet har ingen lösning
  - Systemet har oändligt många lösningar

Titta på trappan!

Matrisinvers (Definition 3.6.1)

En kvadratisk matris A kallas inverterbar om det finns en matris B så att

$$AB=BA=I$$

B kallas A:s invers och betecknas A^{-1}.

När finns invers (Sats 3.6.2)

Låt A vara en $n \times n$-matris. Följande påståenden är ekvivalenta

(a) A är inverterbar

(b) Matrisekvationen $AX=Y$ har entydig lösning för alla $n \times 1$-matriser Y.

(c) Matrisekvationen $AX=0$ har endast den triviala lösningen, $X=0$.

(d) Rang $A=n$

(e) A är radekvivalent med enhetsmatrisen

Att kunna

- Matriskalkyl
- Hantera linjära ekvationssystem som matrisekvationer
- Lösningsstrukturen hos linjära ekvationssystem, koppla till trappstegformen hos totalmatrisen
- Beräkna matrisinvers och lösa matrisekvationer

Elementära radoperationer

(a) Multiplicera rad med nollskild konstant

(b) Byta plats på två rader

(c) Addera *konst*(rad)* till *annan rad*

(a) Hela determinanten multipliceras med konstanten

(b) Determinanten byter tecken

(c) Determinanten ändras ej

Sats 4.5.1

Låt A vara en $n \times n$-matris. Följande påståenden är ekvivalenta

(a) $\det(A) \neq 0$

(b) A är inverterbar

(c) Matrisekvationen $AX=Y$ har entydig lösning för alla $n \times 1$-matriser Y.

(d) Matrisekvationen $AX=0$ har endast den triviala lösningen, $X=0$.

(e) Rang $A=n$

(f) A är radekvivalent med enhetsmatrisen

Produktlagen

Sats 4.6.1. *Låt A och B vara $n \times n$-matriser. Då gäller att*

$$\det AB = \det A \cdot \det B.$$

Konsekvens:

Korollarium 4.6.2. *Låt A vara en inverterbar $n \times n$-matris. Då gäller att*

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Sats 4.7.6. *Låt A vara en inverterbar $n\times n$-matris. Låt $\tilde{A}$ vara A:s matris av kofaktorer, d v s elementet $\tilde{a}_{ij}$ ur $\tilde{A}$ är kofaktorn C_{ij} från A. Då gäller att*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}^t.$$

För 2×2-matriser ger detta följande enkla minnesregel:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

d v s vi inverterar en 2×2-matris genom att byta plats på elementen på huvuddiagonalen, byta tecken på de andra två och dividera med matrisens determinant. Med lite övning kan man också använda sats 4.7.6 på 3×3-matriser.

Att kunna

- Uppbyggnaden av determinantdefinitionen
- Radoperationernas påverkan på determinanten
- Kombinera radoperationer och kofaktorutveckling för att kunna beräkna determinanten
- Determinantkriteriet (entydig lösning vs. villkorad lösning)

Definition 5.2.1 En icke-tom mängd $\mathbb{V}$ säges vara ett vektorrum över de reella talen om följande gäller

I. Det finns i $\mathbb{V}$ en operation kallad addition, betecknad + sådan att

$$\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{V} \Rightarrow \mathbf{u}+\mathbf{v} \in \mathbb{V}$$

För $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in \mathbb{V}$ har denna addition egenskaperna

ADD 1. $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$

ADD 2. $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$

ADD 3. Finns $\mathbf{0}$ i $\mathbb{V}$ sådan att $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$ för alla $\mathbf{u}$ i $\mathbb{V}$

ADD 4. För varje $\mathbf{u}$ i $\mathbb{V}$ finns ett element $-\mathbf{u}$ så att $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$

II. Det finns i V en operation kallad multiplikation med tal, betecknad $\cdot$ sådan att

$$\lambda \in \mathbb{R},\ \mathbf{u} \in \mathbb{V} \Rightarrow \lambda\cdot\mathbf{u} \in \mathbb{V}$$

För $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ och $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ har denna multiplikation egenskaperna

MULT 1. $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$

MULT 2. $\lambda(\mu\mathbf{u})=(\lambda\mu)\mathbf{u}$

MULT 3. $(\lambda+\mu)\mathbf{u}=\lambda\mathbf{u}+\mu\mathbf{u}$

MULT 4. $\lambda(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\lambda\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v}$

Exempel på vektorrum

1. $\mathbb{V}$=Reella talen
2. $\mathbb{V}$={Vektorer i planet}
3. $\mathbb{V}$={Vektorer i rummet}
4. $\mathbb{V}$={rxk-matriser}=$\mathbb{M}_{rk}$
5. $\mathbb{V}$={Polynom}=$\mathbb{P}_\infty$
6. I=intervall$\subset\mathbb{R}$, $\mathbf{V}=\{f{:}I\rightarrow\mathbb{R}\}$

Definition 5.3.1, sid 104 Underrum

En icke-tom delmängd $\mathbb{U}$ av ett vektorrum $\mathbb{V}$ kallas ett ***underrum*** av $\mathbb{V}$ om $\mathbb{U}$ själv är ett vektorrum med den addition och multiplikation med tal som definierats i $\mathbb{V}$.

Varför då??

Slipper kontrollera alla 10 villkoren!

Sats 5.3.2, sid 105. Låt $\mathbb{U}$ vara en icke-tom delmängd av ett vektorrum $\mathbb{V}$. Då är $\mathbb{U}$ ett underrum av $\mathbb{V}$ omm

I. $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{U}\Rightarrow\mathbf{u}+\mathbf{v}\in\mathbb{U}$

ADD 1. $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$

ADD 2. $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$

ADD 3. Finns $\mathbf{0}$ i $\mathbb{U}$ sådan att $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$ för alla $\mathbf{u}$ i $\mathbb{U}$

ADD 4. För varje $\mathbf{u}$ i $\mathbb{U}$ finns ett element $-\mathbf{u}$ så att $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$

II. $\lambda\in\mathbb{R}$, $\mathbf{u}\in\mathbb{U}\Rightarrow\lambda\mathbf{u}\in\mathbb{U}$

MULT 1. $\lambda(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\lambda\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v}$

MULT 2. $(\lambda+\mu)\mathbf{u}=\lambda\mathbf{u}+\mu\mathbf{u}$

MULT 3. $\lambda(\mu\mathbf{u})=(\lambda\mu)\mathbf{u}$

MULT 4. $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$

Exempel på underrum

1. Linje genom origo i planet (rummet) är underrum av $\mathbf{R}^2$.
2. Plan genom origo i rummet är underrum av $\mathbf{R}^3$.
3. $\mathbb{P}_n=\{p(x)\colon \deg(p(x))\leq n\}$ är underrum av $\mathbb{P}_\infty$.
4. Lösningsmängden till det homogena linjära ekvationssystemet A$\mathbf{x}=\mathbf{0}$ i n obekanta är ett underrum av $\mathbf{R}^n$.

Snabbtest

- Om $\mathbb{U}$ är ett underrum av $\mathbb{V}$ så gäller att $\mathbf{0} \in \mathbb{U}$.
- Om $\mathbf{0} \notin \mathbb{U}$ så är $\mathbb{U}$ inget underrum

Definition 5.3.8, sid 108.

Låt $\mathbb{V}$ vara ett vektorrum och $M=\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset \mathbb{V}$. Låt $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Då kallas

$$\lambda_1\mathbf{v}_1+\lambda_2\mathbf{v}_2+\ldots+\lambda_n\mathbf{v}_n$$

en *linjärkombination* av M.

Mängden av *alla* linjärkombinationer av M kallas *linjära höljet* av M och betecknas $[M]$ alternativt $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n]$.

Sats 5.3.16 (Satsen om löjliga element)

Låt $\mathbb{V}$ vara ett vektorrum och antag att

$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_n \in \mathbb{V}$. Då gäller

$\mathbf{v}_n \in [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}] \Rightarrow$

$$\Rightarrow [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_n]=[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}],$$

dvs om någon av de genererande vektorerna är en linjärkombination av de andra så kan den strykas utan att höljet ändras

Definition 5.4.1, sid 113. Linjärt (o)beroende

Låt $\mathbb{V}$ vara ett vektorrum och $M=\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset \mathbb{V}$. Ekvationen

$$\lambda_1\mathbf{v}_1+\lambda_2\mathbf{v}_2+\ldots+\lambda_n\mathbf{v}_n=\mathbf{0},$$

där de obekanta minst $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ söks, kallas *beroendeekvationen*. Om beroendeekvationen har *fler lösningar* än $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$ säges mängden M vara ***linjärt beroende***.

Om $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$ är *den enda lösningen* säger vi att M är ***linjärt oberoende***.

Exempel på linjärt (o)beroende

1. Två icke-parallella vektorer är linjärt oberoende.
2. Två parallella vektorer är linjärt beroende.
3. Tre vektorer i samma plan är linjärt beroende.
4. Fyra (eller fler) vektorer i $\mathbf{R}^3$ är linjärt beroende
5. Standardbasvektorerna i $\mathbf{R}^n$ är linjärt oberoende.
6. Fler än n st vektorer i $\mathbf{R}^n$ är linjärt beroende.

Sats 5.4.4, sid 114

Låt $\mathbb{V}$ vara ett vektorrum och $M=\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset \mathbb{V}$. Då gäller

M är linjärt beroende

$$\Leftrightarrow$$

M innehåller minst ett löjligt element