Dagens ämnen

- Basbegreppet, koordinater
- Dimension
  - För många är beroende
  - För få spänner inte upp
  - Rätt antal oberoende är bas
- Banta ned och fylla ut
  - Banta med SOLE (satsen om löjliga element)
  - Fyll ut med Plus-satsen
  - SORAE visar när vi är klara

Basbegreppet

Definition 2.3.1. En ordnad uppsättning vektorer i planet (rummet) kallas en *bas* om varje vektor i planet (rummet) kan skrivas som en linjärkombination av de givna på precis ett sätt.

(a) $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n] = \mathbb{V}$,

(b) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ är linjärt oberoende.

- Entydighet ersatt av linjärt oberoende. Linjärt oberoende är bara ett ekvationsmässigt sätt att säga entydighet.

Koordinater

Sats 5.4.9. *Låt $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ vara en bas i $\mathbb{V}$. Till varje vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$ finns entydigt bestämda tal $x_1, x_2, \dots, x_n$ så att*

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_n\mathbf{v}_n.$$

Definition 5.4.10. Låt $\underline{\mathbf{v}} = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_n)$ så att

$$\mathbb{V} \ni \mathbf{u} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_n\mathbf{v}_n = \underline{\mathbf{v}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{v}}\, X.$$

Talen $x_1, x_2, \dots, x_n$ kallas *koordinaterna* för vektorn $\mathbf{u}$ i basen $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ och $n \times 1$-matrisen X kallas $\mathbf{u}$:s *koordinatmatris* i basen $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$.

Dimension

Sats 5.4.15. (Satsen om för många element)
Låt $\mathbb{V}$ vara ett vektorrum som har en bas med n stycken vektorer. Om $M \subset \mathbb{V}$ innehåller fler än n vektorer så är M linjärt beroende.

Tänk på ett plan. Har du fler än två så är det nån som inte behövs.

Korollarium 5.4.16. *Om $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ och $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m$ är baser i vektorrummet $\mathbb{V}$ så är $n = m$, d v s alla baser i $\mathbb{V}$ består av lika många vektorer.*

Tänk på ett plan igen.

Definition 5.4.17. Om ett vektorrum $\mathbb{V}$ har en bas bestående av n stycken vektorer, säges $\mathbb{V}$ ha *dimensionen* n och vi skriver $\dim \mathbb{V} = n$.

Sats5.4.19 Satsen om rätt antal element

Låt $\mathbb{V}$ vara ett vektorrum och antag att $\dim \mathbb{V} = n$ *samt att* $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\} \subset \mathbb{V}$. *Då är följande påståenden ekvivalenta:*

(a) $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ *är linjärt oberoende,* $AX = 0$ har endast den triviala lösningen

(b) $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n] = \mathbb{V}$, $AX = Y$ är entydigt lösbar för alla högerled

(c) $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ *är en bas i* $\mathbb{V}$.

Då ”rätt antal” ger kvadratiskt system följer påståendet ur stora ekvationssystemsatsen 4.5.1.

Sats 5.4.21 Plus-satsen

Låt $\mathbb{V}$ vara ett vektorrum och $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1} \in \mathbb{V}$. *Antag att*

(a) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ *är linjärt oberoende,*

(b) $\mathbf{v}_{k+1} \notin [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k]$.

Då gäller att

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\} \cup \{\mathbf{v}_{k+1}\} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}\}$$

är linjärt oberoende.

Direkt summa

Definition 5.4.24. Låt $\mathbb{U}_1$ och $\mathbb{U}_2$ vara underrum av ett vektorrum $\mathbb{V}$. Om $\mathbb{U}_1 \cap \mathbb{U}_2 = \{\mathbf{0}\}$, d v s det enda element som tillhör båda är $\mathbf{0}$, så definierar vi den *direkta summan* av $\mathbb{U}_1$ och $\mathbb{U}_2$, $\mathbb{U}_1 \oplus \mathbb{U}_2$ som

$$\mathbb{U}_1 \oplus \mathbb{U}_2 = \{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \in \mathbb{V} \colon \mathbf{u}_1 \in \mathbb{U}_1, \quad \mathbf{u}_2 \in \mathbb{U}_2\}.$$

Sats 5.4.25. *Låt $\mathbb{U}_1$ och $\mathbb{U}_2$ vara underrum av ett vektorrum $\mathbb{V}$ sådana att $\mathbb{U}_1 \cap \mathbb{U}_2 = \{\mathbf{0}\}$. Då är $\mathbb{U}_1 \oplus \mathbb{U}_2$ ett underrum av $\mathbb{V}$.*

”Två linjer blir ett plan”

Sats 5.4.26. (Multi-Plus-satsen) *Låt $\mathbb{U}_1$, $\dim \mathbb{U}_1 = k$ och $\mathbb{U}_2$, $\dim \mathbb{U}_2 = m$ vara underrum av ett vektorrum $\mathbb{V}$ och antag att $\mathbb{U}_1 \cap \mathbb{U}_2 = \{\mathbf{0}\}$. Då är*

$$\dim(\mathbb{U}_1 \oplus \mathbb{U}_2) = k + m.$$

Vidare, om $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ är en bas i $\mathbb{U}_1$ och $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$ är en bas i $\mathbb{U}_2$ så är

$$\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n \text{ en bas i } \mathbb{U}_1 \oplus \mathbb{U}_2.$$