Dagens ämnen

- ON-baser
- Konstruktion av ON-baser
  - Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess
  - Projektion på underrum
- Minsta avstånd
- Minsta-kvadratmetoden
- Läs själv: Basbyte mellan ON-baser (Lätt!)

Ortonormala mängder

Definition 6.3.1. Låt $\mathbb{E}$ vara ett euklidiskt rum. Mängden $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\} \subset \mathbb{E}$ säges vara en *OrtoNormerad mängd* (ON-mängd) om

$$(\mathbf{u}_i|\mathbf{u}_j) = \begin{cases} 1 & \text{om} \quad i = j \\ 0 & \text{om} \quad i \neq j \end{cases}, \quad 1 \leq i, j \leq m.$$

Sats 6.3.2. *Om $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\} \subset \mathbb{E}$ är en ON-mängd så är $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$ linjärt oberoende.*

Följaktligen är en ON-mängd med rätt antal element en ***OrtoNormerad***-bas (ON-bas).

Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess

I. Normera

II. Fyll ut

III. Projicera

IV. Subtrahera

V. Goto I.

Ortogonalprojektion

- Ortogonalprojektionen av **v** på **u**:

$$\mathbf{v}_{\|\mathbf{u}} = \frac{(\mathbf{v}|\mathbf{u})}{|\mathbf{u}|^2}\mathbf{u}$$

Ortogonal projektion på underrum

Sats 6.3.8. *Låt $\mathbb{U}$ vara ett underrum av ett euklidiskt rum $\mathbb{E}$ och låt $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$ vara en ON-bas i $\mathbb{U}$. Varje vektor i $\mathbf{v} \in \mathbb{E}$ kan på ett och endast ett sätt skrivas på formen*

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} + \mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}} \quad \text{där} \quad \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} \in \mathbb{U} \quad \text{och} \quad \mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}} \in \mathbb{U}^{\perp}.$$

Vidare,

$$\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} = (\mathbf{v}|\mathbf{u}_1)\,\mathbf{u}_1 + \dots + (\mathbf{v}|\mathbf{u}_m)\,\mathbf{u}_m \tag{6.3.3}$$

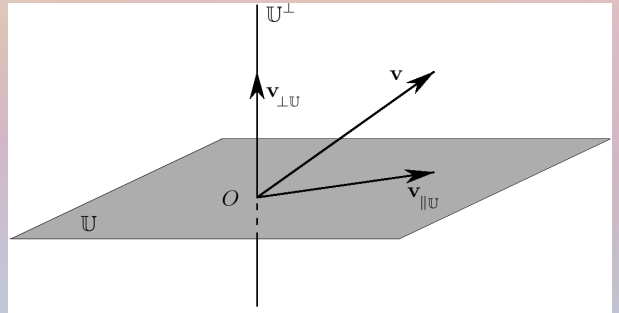
och vi kallar $\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}$ den ortogonala projektionen *på $\mathbb{U}$.*

- ***OBS!! Krävs ON-bas!!!***
- Notera att varje term i projektionen är ortogonalprojektion på EN basvektor i ***ON-basen***

Ortogonalt komplement

Definition 6.3.6. Låt $\mathbb{U}$ vara ett underrum av ett euklidiskt rum $\mathbb{E}$. Det *ortogonala komplementet* till $\mathbb{U}$ definieras som

$$\mathbb{U}^{\perp} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{E}\colon\ (\mathbf{v}|\mathbf{u}) = 0 \quad \text{för alla} \quad \mathbf{u} \in \mathbb{U}\}.$$



Figur 6.2: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} + \mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}}$

Utfyllnad?

Definition 5.4.23. Låt $\mathbb{U}_1$ och $\mathbb{U}_2$ vara underrum av ett vektorrum $\mathbb{V}$. Om $\mathbb{U}_1 \cap \mathbb{U}_2 = \{\mathbf{0}\}$, d v s det enda element som tillhör båda är $\mathbf{0}$, så definierar vi den *direkta summan* av $\mathbb{U}_1$ och $\mathbb{U}_2$, $\mathbb{U}_1 \oplus \mathbb{U}_2$ som

$$\mathbb{U}_1 \oplus \mathbb{U}_2 = \{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \in \mathbb{V}\colon\ \mathbf{u}_1 \in \mathbb{U}_1, \quad \mathbf{u}_2 \in \mathbb{U}_2\}.$$

Sats 5.4.25. (Multi-Plus-satsen)
Låt $\mathbb{U}_1$, $\dim \mathbb{U}_1 = m$ och $\mathbb{U}_2$, $\dim \mathbb{U}_2 = n$ vara underrum av ett vektorrum $\mathbb{V}$ och antag att $\mathbb{U}_1 \cap \mathbb{U}_2 = \{\mathbf{0}\}$. Då är

$$\dim(\mathbb{U}_1 \oplus \mathbb{U}_2) = m + n.$$

Vidare, om $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ är en bas i $\mathbb{U}_1$ och $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$ är en bas i $\mathbb{U}_2$ så är $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$ en bas i $\mathbb{U}_1 \oplus \mathbb{U}_2$.

Korollarium 6.3.10. *Låt $\mathbb{U}$ vara ett underrum av ett euklidiskt rum $\mathbb{E}$. Då gäller att*

$$\mathbb{U} \oplus \mathbb{U}^{\perp} = \mathbb{E}.$$

Minsta avstånd

Sats 6.3.14. *Låt $\mathbb{U}$ vara ett underrum av ett euklidiskt rum $\mathbb{E}$. Då gäller att*

$$\min_{\mathbf{u}\in\mathbb{U}} |\mathbf{v} - \mathbf{u}| = \left|\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}\right| = \left|\mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}}\right|,$$

d v s minsta avståndet = ortogonala avståndet.

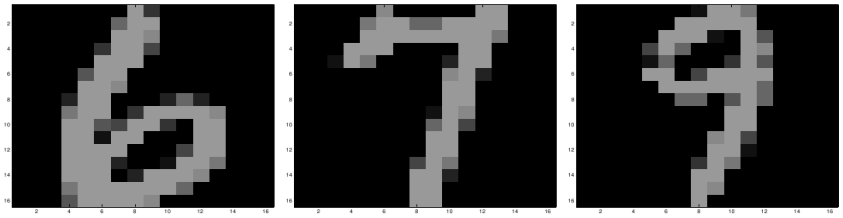
$$\mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}} = \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}^{\perp}}$$

Räkna ut projektionen på det rum som har lägst dimension!

Ett praktiskt exempel (TANA15)

Classification of Handwritten Digits

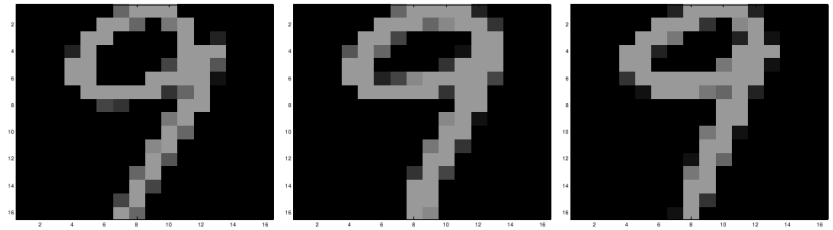
Have a *reference set* consisting of $n = 1707$ 16×16 pixel images showing digits scanned from letters (postal codes).



Measure distance using Euclidean norm $\|S - R_j\|_2$.

Ett praktiskt exempel

Example Classify using Nearest Neighbour Classification.



The unknown test digit (left) and its nearest neighbour (middle) and also the second nearest (right).

Of a (very difficult) *Test Set* of size 2007 a total of 92.8% are classified correctly. Objects are vectors in $\mathbb{R}^{256}$ so have vector space structure.

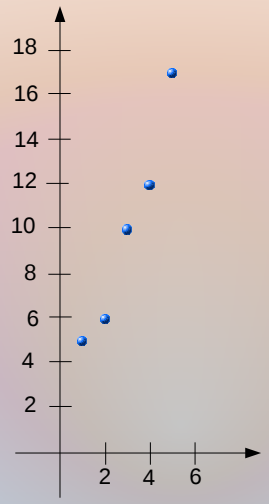
Ett praktiskt exempel

- För att bättra på träffsäkerheten jobbar man med referensmängderna:
  - Bilda medelvärdet av, tex alla 5:or
  - Subtrahera detta från alla 5:orna
  - Bilda nytt medelvärde
  - Subtrahera
  - Gör detta så att vi har, t ex 7 medelvärden
- Gör detta för alla siffrorna

Ett praktiskt exempel

- Då har vi 10st 7-dim underrum $\mathbb{U}_0, \mathbb{U}_1, \ldots, \mathbb{U}_9$ av R^{256} bestående av medelvärdena av respektive siffror
- Bestäm ON-bas i vart och ett av rummen med hjälp av Gram-Schmidt
- Projicera okända bilden på de olika underrummen och beräkna avståndet till dessa.
- Underrummet som är närmast ger vilken siffra den okända skall tolkas som.

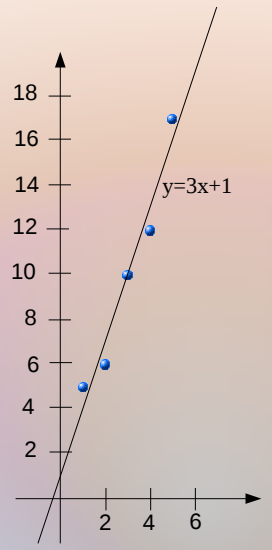
Minsta-kvadratmetoden



Minsta-kvadratproblemet

Givet ett (olösbart) linjärt system $AX=Y$ av m ekvationer i n obekanta, bestäm en vektor $\mathbf{x}=\underline{\mathbf{e}}X$ som minimerar $|\underline{\mathbf{e}}Y-\underline{\mathbf{e}}AX|$ med avseende på standardskalärprodukten i $\mathbb{R}^m$.

- Ett sådant **x** kallas en ***minsta-kvadratlösning*** till systemet,
- $\mathbf{v}-\underline{\mathbf{e}}A\mathbf{x}$ kallas ***felvektorn i minsta-kvadratmening***
- $|\mathbf{v}-\underline{\mathbf{e}}AX|$ ***minsta-kvadratfelet.***



Sats 6.4.1. *Låt A vara en $n\times m$-matris, X en $m\times 1$-matris, Y en $n\times 1$-matris och $\underline{\mathbf{e}}$ standardbasen i $\mathbb{R}^n$. Minstakvadrat-lösningarna till $AX=Y$, d v s de X för vilka $|\underline{\mathbf{e}}\,Y-\underline{\mathbf{e}}\,AX|$ är så liten som möjligt, fås genom att lösa* normalekvationerna

$$A^tAX = A^tY.$$

Normalekvationerna är alltid lösbara och om X_0 är en lösning så gäller att $\underline{\mathbf{e}}\,AX_0$ är den ortogonala projektionen av $\underline{\mathbf{e}}\,Y$ på A:s kolonnrum.