Dagens ämnen

- Invers avbildning
- Isometriska avbildningar
  - Definition och egenskaper
  - Vilka typer av isometriska avbildningar finns?
  - Karakterisering
- Symmetriska avbildningar
  - Definition och egenskaper
- Area- och volymsskala
  - Arean av en ellips

Inverser till linjära avbildningar

Definition 7.6.5. Låt $\mathbb{U}$ och $\mathbb{V}$ vara vektorrum av ändlig dimension och $F\colon \mathbb{U}\to\mathbb{V}$ en linjär avbildning. Om det finns en avbildning $G\colon \mathbb{V}\to\mathbb{U}$ sådan att

$$G\circ F(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \text{ för varje } \mathbf{u}\in\mathbb{U} \quad \text{och} \quad F\circ G(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \text{ för varje } \mathbf{v}\in\mathbb{V}$$

så säges F vara inverterbar med invers G.

Lemma 7.6.6. *Antag att $F\colon \mathbb{U}\to\mathbb{V}$ har en invers $F^{-1}\colon \mathbb{V}\to\mathbb{U}$. Då gäller*

(a) $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{u}_2 \Longrightarrow F(\mathbf{u}_1) \neq F(\mathbf{u}_2)$,

(b) $N(F) = \{\mathbf{0}\}$.

Inverser till linjära avbildningar

Sats 7.6.7. *F^{-1} är linjär och inverterbar med invers F.*

Korollarium 7.6.8. *För att F skall kunna ha en invers är det nödvändigt att $\dim\mathbb{U} = \dim\mathbb{V}$. Om F har en invers så är $V(F) = \mathbb{V}$*

Sats 7.6.9. *Låt $F\colon \mathbb{U}\to\mathbb{V}$ vara en inverterbar linjär avbildning med avbildningsmatris A relativt baserna $\underline{\mathbf{u}}$ och $\underline{\mathbf{v}}$ i $\mathbb{U}$ respektive $\mathbb{V}$.*
Då är A kvadratisk och inverterbar och A^{-1} är avbildningsmatris, relativt samma baser, till F^{-1}.

Jämförelse med ekvationssystemsatsen

Sats 4.5.1. *Låt A vara en $n\times n$-matris. Följande påståenden är ekvivalenta:*

(a) $\det A \neq 0$.

(b) *A är inverterbar.*

(c) *Matrisekvationen (ekvationssystemet) $AX = B$ har entydig lösning för alla $n\times 1$-matriser B.*

(d) *Matrisekvationen (ekvationssystemet) $AX = 0$ har endast den triviala lösningen, $X = 0$.*

Jämförelse med ekvationssystemsatsen

Korollarium 7.6.10. *Låt $F\colon \mathbb{U}\to\mathbb{U}$ vara en linjär avbildning med avbildningsmatris A i någon bas i $\mathbb{U}$. Då är följande påståenden ekvivalenta*

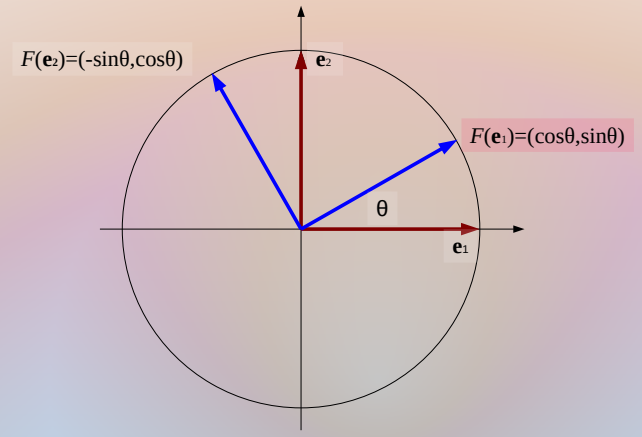
(a) $\det A \neq 0$,

(b) *F är inverterbar,*

(c) $V(F) = \mathbb{U}$,

(d) $N(F) = \{\mathbf{0}\}$,

Vridning i planet



Isometriska avbildningar

- Iso: prefix som betyder ”samma”.

  Metrisk = längd

  IsoMetrisk = Samma Längd

Definition 7.7.1. Låt $\mathbb{E}$ vara ett euklidiskt rum. Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{E}\to\mathbb{E}$ kallas *isometrisk* om

$$|F(\mathbf{u})| = |\mathbf{u}|, \quad \text{för alla } \mathbf{u} \in \mathbb{E}.$$

Isometriska avbildningar

Sats 7.7.2. *Låt $\mathbb{E}$ vara ett euklidiskt rum, $\dim \mathbb{E} = n$ och $F\colon \mathbb{E}\to\mathbb{E}$ en linjär avbildning som i ON-basen $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ har matrisen A. Då är följande påståenden ekvivalenta:*

(a) *F är isometrisk,*

(b) $(F(\mathbf{u})|F(\mathbf{v})) = (\mathbf{u}|\mathbf{v})$ *för alla* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}$.

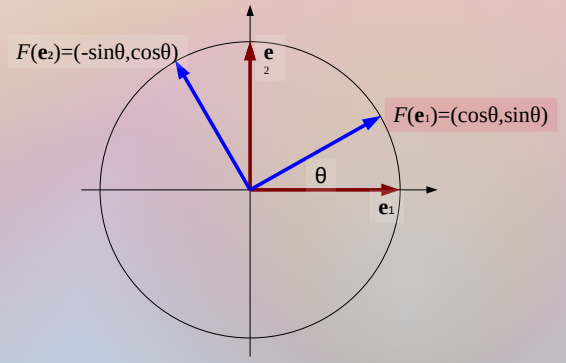
(c) $F(\mathbf{e}_1), F(\mathbf{e}_2), \dots, F(\mathbf{e}_n)$ *är en ON-bas i* $\mathbb{E}$.

(d) *A är ortonormal.*

Isometrier i 2-dim

- Vridning i planet

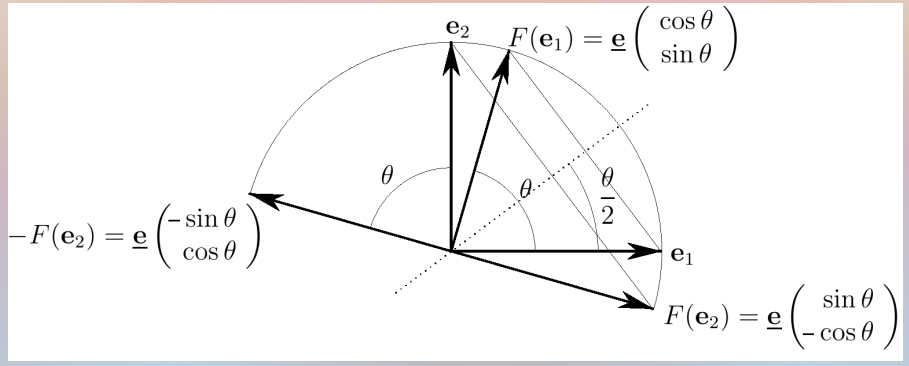
$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$



Isometrier i 2-dim

- Spegling i 2-dim

$$A_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$



Isometrier i 2-dim

Sats 7.7.5. *Antag att $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är en isometri och att F har avbildningsmatris A i någon ON-bas i $\mathbb{R}^2$. Om $\det A = 1$ så är F en vridning och om $\det A = -1$ så är F en spegling.*

Isometrier i 3-dim

Sats 7.7.6. *Antag att $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är en isometri och att F har avbildningsmatris A i någon ON-bas i $\mathbb{R}^3$. Om $\det A = 1$ så är F en vridning och om $\det A = -1$ så är F antingen en spegling eller en sammansättning mellan en vridning och en spegling.*

Korollarium 6.3.12. *Låt $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ vara en ON-bas i $\mathbb{E}$ och $\mathbf{v} \in \mathbb{E}$. Då är $\mathbf{v}$:s koordinater*

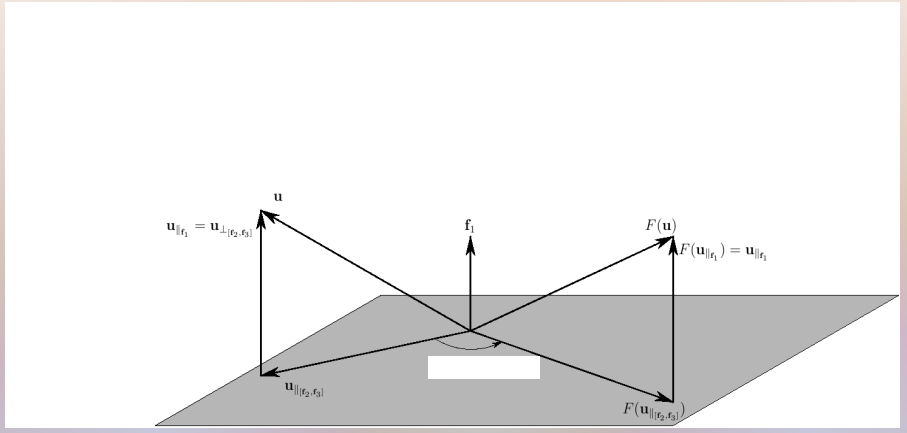
$$x_i = (\mathbf{v}|\mathbf{u}_i), \quad i = 1, \ldots, n$$

så att

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v}|\mathbf{u}_1)\,\mathbf{u}_1 + (\mathbf{v}|\mathbf{u}_2)\,\mathbf{u}_2 + \ldots + (\mathbf{v}|\mathbf{u}_n)\,\mathbf{u}_n = \underline{\mathbf{u}} \begin{pmatrix} (\mathbf{v}|\mathbf{u}_1) \\ (\mathbf{v}|\mathbf{u}_2) \\ \vdots \\ (\mathbf{v}|\mathbf{u}_n) \end{pmatrix},$$

d v s koordinater i ON-bas är skalärprodukter.

Vridning kring $\mathbf{f}_1$



Symmetriska avbildningar

Definition 7.7.8. Låt $\mathbb{E}$ vara ett euklidiskt rum och $F\colon \mathbb{E}\to\mathbb{E}$ en linjär avbildning. Avbildningen F säges vara *symmetrisk* om

$$(F(\mathbf{u})|\mathbf{v}) = (\mathbf{u}|F(\mathbf{v})), \quad \text{för alla } \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{E}.$$

Sats 7.7.9. *Låt $\mathbb{E}$ vara ett euklidiskt rum och $F\colon \mathbb{E}\to\mathbb{E}$ en symmetrisk linjär avbildning. Då gäller att*

$$N(F) = V(F)^{\perp}.$$

Symmetriska avbildningar

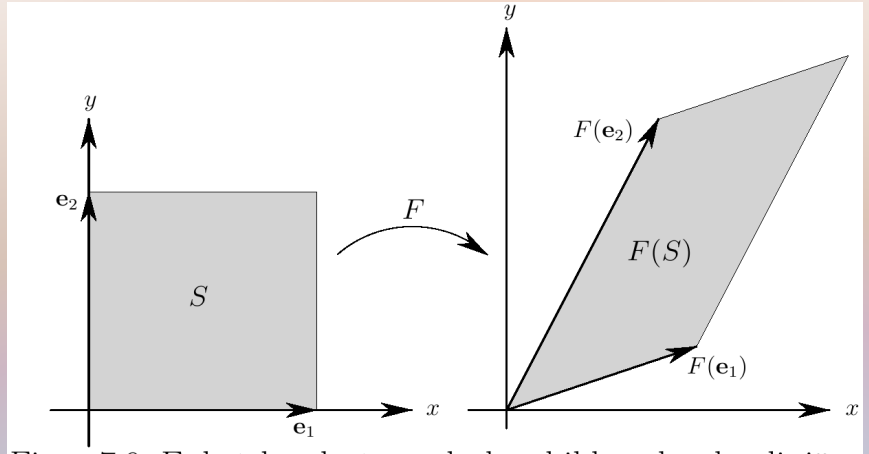
Korollarium 7.7.10. *Låt $\mathbb{E}$ vara ett euklidiskt rum, $\dim\mathbb{E} = n$ och $F\colon \mathbb{E}\to\mathbb{E}$ en symmetrisk linjär avbildning. Låt $\mathbf{f}_1,\dots,\mathbf{f}_m$ vara en ON-bas i $N(F)$ och $\mathbf{f}_{m+1},\dots,\mathbf{f}_n$ en ON-bas i $V(F)$. Då är*

$$\mathbf{f}_1,\dots,\mathbf{f}_m,\mathbf{f}_{m+1},\dots,\mathbf{f}_n \text{ en ON-bas i } \mathbb{E}.$$

Sats 7.7.14. *Låt $\mathbb{E}$ vara ett euklidiskt rum, $\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\}$ en ON-bas i $\mathbb{E}$ och $F\colon \mathbb{E}\to\mathbb{E}$ en linjär avbildning med avbildningsmatris A relativt $\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\}$. Då gäller*

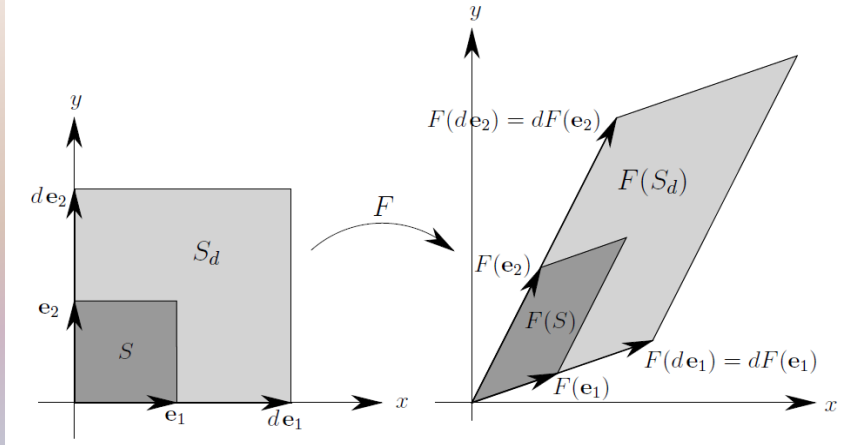
$$F \text{ är symmetrisk} \iff A \text{ är symmetrisk, d v s } A = A^t.$$

Area- och volymsskala



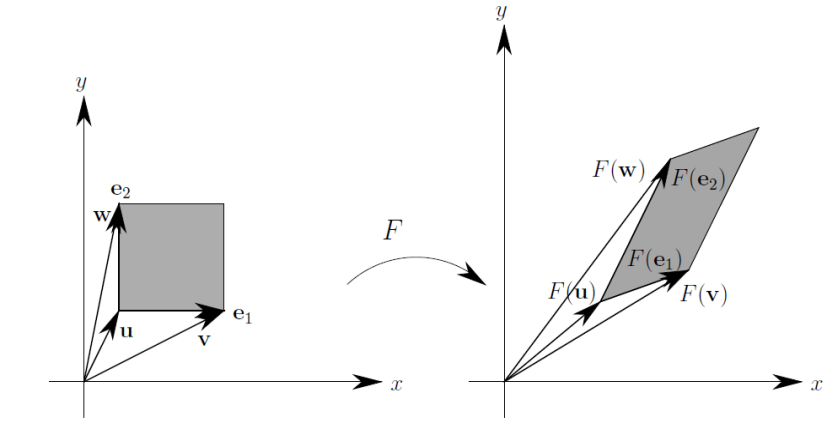
Figur 7.9: Enhetskvadraten och dess bild under den linjära avbildningen F.

Area- och volymsskala



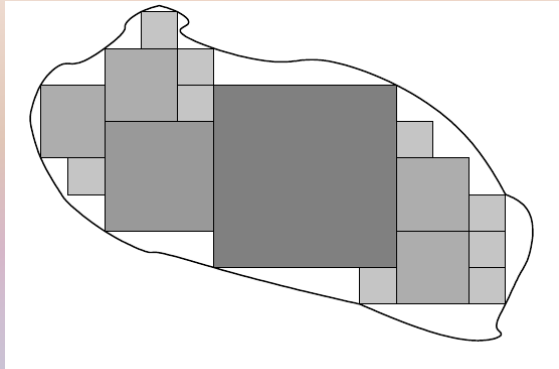
Figur 7.10: Kvadrat med sida $d > 1$ och dess bild under den linjära avbildningen F.

Area- och volymsskala



Figur 7.11: Enhetskvadraten translaterad vektorn $\mathbf{u}$ från origo samt dess bild under den linjära avbildningen F.

Area- och volymsskala



Figur 7.12: Approximation av given area med kvadrater.

Area- och volymsskala

Sats 7.8.1 *Låt $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara en linjär avbildning med avbildningsmatris $A_{\underline{\mathbf{e}}}$ i standardbasen. Antag att $\det A_{\underline{\mathbf{e}}} \neq 0$ och att Ω är ett område i planet vars area kan approximeras godtyckligt väl med den sammanlagda arean av kvadrater med endast sidor gemensamt och som ligger helt och hållet i Ω. Då gäller*

$$\frac{\textit{Arean av } F(\Omega)}{\textit{Arean av } \Omega} = |\det A_{\underline{\mathbf{e}}}|\,.$$

Arean av en ellips

$$F\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \underline{\mathbf{e}}\, A_{\underline{\mathbf{e}}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$

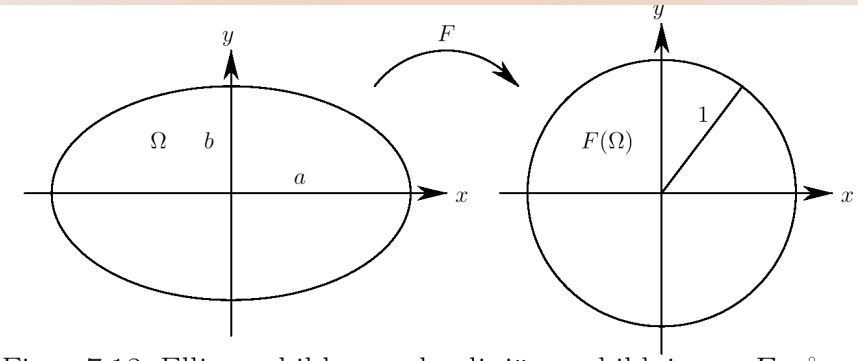
$$= \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1/a \\ x_2/b \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$1 = \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 = y_1^2 + y_2^2$$

Ekvationen för en ellips i x_1x_2-systemet blir ekvationen för enhetscirkeln i y_1y_2-systemet

$$(x_1, x_2) \in \text{ellipsen} \Longrightarrow F\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \text{ enhetscirkeln}$$

Arean av en ellips



Figur 7.13: Ellips avbildas av den linjära avbildningen F på enhetscirkeln.

Arean av en ellips

$$\det A_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{vmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/b \end{vmatrix} = \frac{1}{ab}$$

$$\text{Arean av elipsen } \Omega = \frac{\text{Arean av enhetscirkeln } F(\Omega)}{|\det A_{\underline{\mathbf{e}}}|} = \frac{\pi}{1/ab} =$$

$$= \pi ab.$$