Exempel 1: Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

Låt $\mathbb{U} = \left[\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \subset \mathbb{R}^5$. Bestäm en bas i $\mathbb{U}$, ange $\mathbb{U}$:s dimension och uttryck $\mathbb{U}$ som ett lösningsrum.

Exempel 1: Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

Låt $\mathbb{U} = \left[\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \subset \mathbb{R}^5$. Bestäm en bas i $\mathbb{U}$, ange $\mathbb{U}$:s dimension och uttryck $\mathbb{U}$ som ett lösningsrum.

Lösning: Kalla de genererande vektorerna $\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_4$.

Exempel 1: Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

Låt $\mathbb{U} = \left[\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \subset \mathbb{R}^5$. Bestäm en bas i $\mathbb{U}$, ange $\mathbb{U}$:s dimension och uttryck $\mathbb{U}$ som ett lösningsrum.

Lösning: Kalla de genererande vektorerna $\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_4$. Hitta löjliga element genom att lösa beroendeekvationen, hitta ekvationerna för $\mathbb{U}$ genom att lösa ekvationen "L.K.= godtycklig vektor".

Exempel 1: Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

Låt $\mathbb{U} = \left[\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \subset \mathbb{R}^5$. Bestäm en bas i $\mathbb{U}$, ange $\mathbb{U}$:s dimension och uttryck $\mathbb{U}$ som ett lösningsrum.

Lösning: Kalla de genererande vektorerna $\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_4$. Hitta löjliga element genom att lösa beroendeekvationen, hitta ekvationerna för $\mathbb{U}$ genom att lösa ekvationen "L.K.= godtycklig vektor". Vi får

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3 + \lambda_4 \mathbf{u}_4 =$$

Exempel 1: Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

Låt $\mathbb{U} = \left[\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \subset \mathbb{R}^5$. Bestäm en bas i $\mathbb{U}$, ange $\mathbb{U}$:s dimension och uttryck $\mathbb{U}$ som ett lösningsrum.

Lösning: Kalla de genererande vektorerna $\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_4$. Hitta löjliga element genom att lösa beroendeekvationen, hitta ekvationerna för $\mathbb{U}$ genom att lösa ekvationen "L.K.= godtycklig vektor". Vi får

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3 + \lambda_4 \mathbf{u}_4 = \lambda_1 \, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \lambda_2 \, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exempel 1: Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

Låt $\mathbb{U} = \left[\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \subset \mathbb{R}^5$. Bestäm en bas i $\mathbb{U}$, ange $\mathbb{U}$:s dimension och uttryck $\mathbb{U}$ som ett lösningsrum.

Lösning: Kalla de genererande vektorerna $\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_4$. Hitta löjliga element genom att lösa beroendeekvationen, hitta ekvationerna för $\mathbb{U}$ genom att lösa ekvationen "L.K.= godtycklig vektor". Vi får

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3 + \lambda_4 \mathbf{u}_4 = \lambda_1 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \lambda_2 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} =$$

Exempel 1: Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

Låt $\mathbb{U} = \left[\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \subset \mathbb{R}^5$. Bestäm en bas i $\mathbb{U}$, ange $\mathbb{U}$:s dimension och uttryck $\mathbb{U}$ som ett lösningsrum.

Lösning: Kalla de genererande vektorerna $\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_4$. Hitta löjliga element genom att lösa beroendeekvationen, hitta ekvationerna för $\mathbb{U}$ genom att lösa ekvationen "L.K.= godtycklig vektor". Vi får

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3 + \lambda_4 \mathbf{u}_4 = \lambda_1 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \lambda_2 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}.$$

Exempel 1: Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

Låt $\mathbb{U} = \left[\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \subset \mathbb{R}^5$. Bestäm en bas i $\mathbb{U}$, ange $\mathbb{U}$:s dimension och uttryck $\mathbb{U}$ som ett lösningsrum.

Lösning: Kalla de genererande vektorerna $\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_4$. Hitta löjliga element genom att lösa beroendeekvationen, hitta ekvationerna för $\mathbb{U}$ genom att lösa ekvationen "L.K.= godtycklig vektor". Vi får

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3 + \lambda_4 \mathbf{u}_4 = \lambda_1 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \lambda_2 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}.$$

Lös systemet på vanligt sätt.

Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & x_4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_5 \end{array}\right) \overset{r_4 - r_2}{\underset{r_1 \leftrightarrow r_2}{\sim}}$$

Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & x_4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_5 \end{array}\right) \overset{r_4 - r_2}{\underset{r_1 \leftrightarrow r_2}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_2 + x_4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_5 \end{array}\right) \overset{r_3 - r_2}{\underset{r_5 - r_2}{\sim}}$$

Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & x_4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_5 \end{array}\right) \overset{r_4 - r_2}{\underset{r_1 \leftrightarrow r_2}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_2 + x_4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_5 \end{array}\right) \overset{r_3 - r_2}{\underset{r_5 - r_2}{\sim}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_2 + x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 + x_5 \end{array}\right)$$

Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & x_4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_5 \end{array}\right) \overset{r_4 - r_2}{\underset{r_1 \leftrightarrow r_2}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_2 + x_4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_5 \end{array}\right) \overset{r_3 - r_2}{\underset{r_5 - r_2}{\sim}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_2 + x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 + x_5 \end{array}\right)$$ Hur många löjliga element har vi?

Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & x_4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_5 \end{array}\right) \overset{r_4 - r_2}{\underset{r_1 \leftrightarrow r_2}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_2 + x_4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_5 \end{array}\right) \overset{r_3 - r_2}{\underset{r_5 - r_2}{\sim}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_2 + x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 + x_5 \end{array}\right)$$ Hur många löjliga element har vi?

Svar: 2.

Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & x_4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_5 \end{array}\right) \overset{r_4 - r_2}{\underset{r_1 \leftrightarrow r_2}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_2 + x_4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_5 \end{array}\right) \overset{r_3 - r_2}{\underset{r_5 - r_2}{\sim}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_2 + x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 + x_5 \end{array}\right)$$ Hur många löjliga element har vi?

Svar: 2. Vilka?

Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & x_4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_5 \end{array}\right) \overset{r_4 - r_2}{\underset{r_1 \leftrightarrow r_2}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_2 + x_4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_5 \end{array}\right) \overset{r_3 - r_2}{\underset{r_5 - r_2}{\sim}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_2 + x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 + x_5 \end{array}\right)$$ Hur många löjliga element har vi?

Svar: 2. Vilka? Enklaste sättet att motivera detta är att lösa beroendeekvationen.

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \end{cases}$$

Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & x_4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_5 \end{array}\right) \overset{r_4 - r_2}{\underset{r_1 \leftrightarrow r_2}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_2 + x_4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_5 \end{array}\right) \overset{r_3 - r_2}{\underset{r_5 - r_2}{\sim}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_2 + x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 + x_5 \end{array}\right)$$ Hur många löjliga element har vi?

Svar: 2. Vilka? Enklaste sättet att motivera detta är att lösa beroendeekvationen.

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_2 - 2\lambda_3 - \lambda_4 \\ -\lambda_3 - 2\lambda_4 \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & x_4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_5 \end{array}\right) \overset{r_4 - r_2}{\underset{r_1 \leftrightarrow r_2}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_2 + x_4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_5 \end{array}\right) \overset{r_3 - r_2}{\underset{r_5 - r_2}{\sim}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_2 + x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 + x_5 \end{array}\right)$$ Hur många löjliga element har vi?

Svar: 2. Vilka? Enklaste sättet att motivera detta är att lösa beroendeekvationen.

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_2 - 2\lambda_3 - \lambda_4 \\ -\lambda_3 - 2\lambda_4 \\ \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s + t \\ -s - 2t \\ s \\ t \end{pmatrix}$$

Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & x_4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_5 \end{array}\right) \overset{r_4 - r_2}{\underset{r_1 \leftrightarrow r_2}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_2 + x_4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_5 \end{array}\right) \overset{r_3 - r_2}{\underset{r_5 - r_2}{\sim}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_2 + x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 + x_5 \end{array}\right)$$ Hur många löjliga element har vi?

Svar: 2. Vilka? Enklaste sättet att motivera detta är att lösa beroendeekvationen.

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_2 - 2\lambda_3 - \lambda_4 \\ -\lambda_3 - 2\lambda_4 \\ \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s + t \\ -s - 2t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

Insättning av lösningarna i beroendeekvationen ger för $s = 1,\ t = 0$

$$-\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$$

Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

Insättning av lösningarna i beroendeekvationen ger för $s = 1,\ t = 0$

$$-\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 = \mathbf{0} \iff \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$

Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

Insättning av lösningarna i beroendeekvationen ger för $s = 1,\ t = 0$

$$-\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 = \mathbf{0} \iff \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$

och med $s = 0,\ t = 1$

$$\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_4 = \mathbf{0}$$

Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

Insättning av lösningarna i beroendeekvationen ger för $s = 1,\ t = 0$

$$-\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 = \mathbf{0} \iff \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$

och med $s = 0,\ t = 1$

$$\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_4 = \mathbf{0} \iff \mathbf{u}_4 = -\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2$$

Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

Insättning av lösningarna i beroendeekvationen ger för $s = 1,\ t = 0$

$$-\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 = \mathbf{0} \iff \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$

och med $s = 0,\ t = 1$

$$\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_4 = \mathbf{0} \iff \mathbf{u}_4 = -\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2,$$

d v s $\mathbf{u}_3$ och $\mathbf{u}_4$ kan utses till löjliga element.

Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

Insättning av lösningarna i beroendeekvationen ger för $s = 1,\ t = 0$

$$-\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 = \mathbf{0} \iff \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$

och med $s = 0,\ t = 1$

$$\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_4 = \mathbf{0} \iff \mathbf{u}_4 = -\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2,$$

d v s $\mathbf{u}_3$ och $\mathbf{u}_4$ kan utses till löjliga element. Ur satsen om löjliga element (Sats 5.3.16, sid 111) följer nu att

$$\mathbb{U} = \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\\1\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\1\\2\\1\\2\end{pmatrix}\right] = \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right].$$

Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

Insättning av lösningarna i beroendeekvationen ger för $s = 1,\ t = 0$

$$-\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 = \mathbf{0} \iff \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$

och med $s = 0,\ t = 1$

$$\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_4 = \mathbf{0} \iff \mathbf{u}_4 = -\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2,$$

d v s $\mathbf{u}_3$ och $\mathbf{u}_4$ kan utses till löjliga element. Ur satsen om löjliga element (Sats 5.3.16, sid 111) följer nu att

$$\mathbb{U} = \left[\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = \left[\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

Då alla löjliga elementen är strukna är de resterande vektorerna linjärt oberoende (Sats 5.4.4, sid 114).

Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

Insättning av lösningarna i beroendeekvationen ger för $s = 1,\ t = 0$

$$-\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 = \mathbf{0} \iff \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$

och med $s = 0,\ t = 1$

$$\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_4 = \mathbf{0} \iff \mathbf{u}_4 = -\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2,$$

d v s $\mathbf{u}_3$ och $\mathbf{u}_4$ kan utses till löjliga element. Ur satsen om löjliga element (Sats 5.3.16, sid 111) följer nu att

$$\mathbb{U} = \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\\1\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\1\\2\\1\\2\end{pmatrix}\right] = \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right].$$

Då alla löjliga elementen är strukna är de resterande vektorerna linjärt oberoende (Sats 5.4.4, sid 114). Följaktligen är $(0,1,0,1,0), (1,1,1,1,1)$ en bas i $\mathbb{U}$ och $\dim \mathbb{U} = 2$.

Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

Åter till ekvationen “L.K.= godtycklig vektor”.

Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

Åter till ekvationen "L.K.= godtycklig vektor". Vi hade

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & x_4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_2 + x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 + x_5 \end{array}\right).$$

Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

Åter till ekvationen "L.K.= godtycklig vektor". Vi hade

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & x_4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_2 + x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 + x_5 \end{array}\right).$$

Ur detta ser vi att systemet är lösbart om och endast om

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ -x_2 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_5 = 0 \end{cases}.$$

Följaktligen är det då detta ekvationssytem som blir $\mathbb{U}$:s ekvationer

Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

Åter till ekvationen "L.K.= godtycklig vektor". Vi hade

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & x_4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_2 + x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 + x_5 \end{array}\right).$$

Ur detta ser vi att systemet är lösbart om och endast om

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ -x_2 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_5 = 0 \end{cases}.$$

Följaktligen är det då detta ekvationssytem som blir $\mathbb{U}$:s ekvationer, d v s

$$\mathbb{U} = \left[\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

Åter till ekvationen "L.K.= godtycklig vektor". Vi hade

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & x_4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & x_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_2 + x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 + x_5 \end{array}\right).$$

Ur detta ser vi att systemet är lösbart om och endast om

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ -x_2 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_5 = 0 \end{cases}.$$

Följaktligen är det då detta ekvationssytem som blir $\mathbb{U}$:s ekvationer, d v s

$$\mathbb{U} = \left[\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 : \begin{array}{l} -x_1 + x_3 = 0 \\ -x_2 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

Hur skall vi då välja utfyllnaden?

Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

Hur skall vi då välja utfyllnaden? Vi använder “Plus-satsen”.

Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

Hur skall vi då välja utfyllnaden? Vi använder "Plus-satsen".

Sats 5.4.21, sid 123 Låt $\mathbb{V}$ vara ett vektorrum och $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1} \in \mathbb{V}$. Antag att

(a) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ är linjärt oberoende,

(b) $\mathbf{v}_{k+1} \notin [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k]$.

Då gäller att

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\} \cup \{\mathbf{v}_{k+1}\} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}\}$$

är linjärt oberoende.

Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

Hur skall vi då välja utfyllnaden? Vi använder "Plus-satsen".

Sats 5.4.21, sid 123 Låt $\mathbb{V}$ vara ett vektorrum och $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1} \in \mathbb{V}$. Antag att

(a) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ är linjärt oberoende,

(b) $\mathbf{v}_{k+1} \notin [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k]$.

Då gäller att

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\} \cup \{\mathbf{v}_{k+1}\} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}\}$$

är linjärt oberoende.

Hur många skall vi fylla ut med?

Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

Hur skall vi då välja utfyllnaden? Vi använder "Plus-satsen".

Sats 5.4.21, sid 123 Låt $\mathbb{V}$ vara ett vektorrum och $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1} \in \mathbb{V}$. Antag att

(a) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ är linjärt oberoende,

(b) $\mathbf{v}_{k+1} \notin [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k]$.

Då gäller att

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\} \cup \{\mathbf{v}_{k+1}\} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}\}$$

är linjärt oberoende.

Hur många skall vi fylla ut med? **Svar:** 3.

Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

Hur skall vi då välja utfyllnaden? Vi använder "Plus-satsen".

Sats 5.4.21, sid 123 Låt $\mathbb{V}$ vara ett vektorrum och $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1} \in \mathbb{V}$. Antag att

(a) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ är linjärt oberoende,

(b) $\mathbf{v}_{k+1} \notin [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k]$.

Då gäller att

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\} \cup \{\mathbf{v}_{k+1}\} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}\}$$

är linjärt oberoende.

Hur många skall vi fylla ut med? **Svar:** 3.
Vi använder Plus-satsen tre gånger och väljer första utfyllnadsvektorn genom att bryta mot
en ekvation och uppfylla de andra två

Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

Hur skall vi då välja utfyllnaden? Vi använder "Plus-satsen".

Sats 5.4.21, sid 123 Låt $\mathbb{V}$ vara ett vektorrum och $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1} \in \mathbb{V}$. Antag att

(a) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ är linjärt oberoende,

(b) $\mathbf{v}_{k+1} \notin [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k]$.

Då gäller att

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\} \cup \{\mathbf{v}_{k+1}\} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}\}$$

är linjärt oberoende.

Hur många skall vi fylla ut med? **Svar:** 3.
Vi använder Plus-satsen tre gånger och väljer första utfyllnadsvektorn genom att bryta mot
en ekvation och uppfylla de andra två, den andra genom att bryta mot en av de kvarvarande ekvationerna och uppfylla den sista

Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

Hur skall vi då välja utfyllnaden? Vi använder "Plus-satsen".

Sats 5.4.21, sid 123 Låt $\mathbb{V}$ vara ett vektorrum och $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1} \in \mathbb{V}$. Antag att

(a) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ är linjärt oberoende,

(b) $\mathbf{v}_{k+1} \notin [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k]$.

Då gäller att

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\} \cup \{\mathbf{v}_{k+1}\} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}\}$$

är linjärt oberoende.

Hur många skall vi fylla ut med? **Svar:** 3.
Vi använder Plus-satsen tre gånger och väljer första utfyllnadsvektorn genom att bryta mot
en ekvation och uppfylla de andra två, den andra genom att bryta mot en av de kvarvarande ekvationerna och uppfylla den sista och slutligen, den tredje genom att bryta mot den återstående ekvationen.

Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

Hur skall vi då välja utfyllnaden? Vi använder "Plus-satsen".

Sats 5.4.21, sid 123 Låt $\mathbb{V}$ vara ett vektorrum och $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1} \in \mathbb{V}$. Antag att

(a) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ är linjärt oberoende,

(b) $\mathbf{v}_{k+1} \notin [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k]$.

Då gäller att

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\} \cup \{\mathbf{v}_{k+1}\} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}\}$$

är linjärt oberoende.

Hur många skall vi fylla ut med? **Svar:** 3.
Vi använder Plus-satsen tre gånger och väljer första utfyllnadsvektorn genom att bryta mot
en ekvation och uppfylla de andra två, den andra genom att bryta mot en av de kvarvarande ekvationerna och uppfylla den sista och slutligen, den tredje genom att bryta mot den återstående ekvationen. För att se att detta är en fungerande strategi tittar vi på beviset av Plus-satsen i matriskalkyl-form.

Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

Tänk dig att du fyller ut med tre godtyckliga vektorer

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \quad (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5), \quad (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5).$$

Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

Tänk dig att du fyller ut med tre godtyckliga vektorer

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \quad (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5), \quad (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5).$$

Ställ nu upp beroendeekvationen för dessa fem vektorer och gör samma radoperationer som då vi löste beroendeekvationen.

Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

Tänk dig att du fyller ut med tre godtyckliga vektorer

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \quad (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5), \quad (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5).$$

Ställ nu upp beroendeekvationen för dessa fem vektorer och gör samma radoperationer som
då vi löste beroendeekvationen. Då fås

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 \\ 1 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 & 0 \\ 0 & 1 & x_3 & y_3 & z_3 & 0 \\ 1 & 1 & x_4 & y_4 & z_4 & 0 \\ 0 & 1 & x_5 & y_5 & z_5 & 0 \end{array}\right) \sim$$

Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

Tänk dig att du fyller ut med tre godtyckliga vektorer

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \quad (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5), \quad (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5).$$

Ställ nu upp beroendeekvationen för dessa fem vektorer och gör samma radoperationer som då vi löste beroendeekvationen. Då fås

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 \\ 1 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 & 0 \\ 0 & 1 & x_3 & y_3 & z_3 & 0 \\ 1 & 1 & x_4 & y_4 & z_4 & 0 \\ 0 & 1 & x_5 & y_5 & z_5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 & 0 \\ 0 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 \\ 0 & 0 & -x_1 + x_3 & -y_1 + y_3 & -z_1 + z_3 & 0 \\ 0 & 0 & -x_2 + x_4 & -y_2 + y_4 & -z_2 + z_4 & 0 \\ 0 & 0 & -x_1 + x_5 & -y_1 + y_5 & -z_1 + z_5 & 0 \end{array}\right)$$

Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

Tänk dig att du fyller ut med tre godtyckliga vektorer

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \quad (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5), \quad (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5).$$

Ställ nu upp beroendeekvationen för dessa fem vektorer och gör samma radoperationer som då vi löste beroendeekvationen. Då fås

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 \\ 1 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 & 0 \\ 0 & 1 & x_3 & y_3 & z_3 & 0 \\ 1 & 1 & x_4 & y_4 & z_4 & 0 \\ 0 & 1 & x_5 & y_5 & z_5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 & 0 \\ 0 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 \\ 0 & 0 & -x_1 + x_3 & -y_1 + y_3 & -z_1 + z_3 & 0 \\ 0 & 0 & -x_2 + x_4 & -y_2 + y_4 & -z_2 + z_4 & 0 \\ 0 & 0 & -x_1 + x_5 & -y_1 + y_5 & -z_1 + z_5 & 0 \end{array}\right)$$

Om vektorerna skall vara linjärt oberoende måste vi ha entydighetstrappa.

Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

Tänk dig att du fyller ut med tre godtyckliga vektorer

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \quad (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5), \quad (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5).$$

Ställ nu upp beroendeekvationen för dessa fem vektorer och gör samma radoperationer som då vi löste beroendeekvationen. Då fås

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 \\ 1 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 & 0 \\ 0 & 1 & x_3 & y_3 & z_3 & 0 \\ 1 & 1 & x_4 & y_4 & z_4 & 0 \\ 0 & 1 & x_5 & y_5 & z_5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 & 0 \\ 0 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 \\ 0 & 0 & -x_1 + x_3 & -y_1 + y_3 & -z_1 + z_3 & 0 \\ 0 & 0 & -x_2 + x_4 & -y_2 + y_4 & -z_2 + z_4 & 0 \\ 0 & 0 & -x_1 + x_5 & -y_1 + y_5 & -z_1 + z_5 & 0 \end{array}\right)$$

Om vektorerna skall vara linjärt oberoende måste vi ha entydighetstrappa.

Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

Tänk dig att du fyller ut med tre godtyckliga vektorer

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \quad (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5), \quad (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5).$$

Ställ nu upp beroendeekvationen för dessa fem vektorer och gör samma radoperationer som då vi löste beroendeekvationen. Då fås

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 \\ 1 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 & 0 \\ 0 & 1 & x_3 & y_3 & z_3 & 0 \\ 1 & 1 & x_4 & y_4 & z_4 & 0 \\ 0 & 1 & x_5 & y_5 & z_5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 & 0 \\ 0 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 \\ 0 & 0 & -x_1 + x_3 & -y_1 + y_3 & -z_1 + z_3 & 0 \\ 0 & 0 & -x_2 + x_4 & -y_2 + y_4 & -z_2 + z_4 & 0 \\ 0 & 0 & -x_1 + x_5 & -y_1 + y_5 & -z_1 + z_5 & 0 \end{array}\right)$$

Om vektorerna skall vara linjärt oberoende måste vi ha entydighetstrappa.
Välj första utfyllnadsvektorn så att den bryter mot 1:a

Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

Tänk dig att du fyller ut med tre godtyckliga vektorer

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \quad (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5), \quad (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5).$$

Ställ nu upp beroendeekvationen för dessa fem vektorer och gör samma radoperationer som då vi löste beroendeekvationen. Då fås

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 \\ 1 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 & 0 \\ 0 & 1 & x_3 & y_3 & z_3 & 0 \\ 1 & 1 & x_4 & y_4 & z_4 & 0 \\ 0 & 1 & x_5 & y_5 & z_5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 & 0 \\ 0 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 \\ 0 & 0 & \neq 0 & -y_1 + y_3 & -z_1 + z_3 & 0 \\ 0 & 0 & -x_2 + x_4 & -y_2 + y_4 & -z_2 + z_4 & 0 \\ 0 & 0 & -x_1 + x_5 & -y_1 + y_5 & -z_1 + z_5 & 0 \end{array}\right)$$

Om vektorerna skall vara linjärt oberoende måste vi ha entydighetstrappa.
Välj första utfyllnadsvektorn så att den bryter mot 1:a och uppfyller de andra ekvationerna.

Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

Tänk dig att du fyller ut med tre godtyckliga vektorer

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \quad (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5), \quad (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5).$$

Ställ nu upp beroendeekvationen för dessa fem vektorer och gör samma radoperationer som då vi löste beroendeekvationen. Då fås

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 \\ 1 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 & 0 \\ 0 & 1 & x_3 & y_3 & z_3 & 0 \\ 1 & 1 & x_4 & y_4 & z_4 & 0 \\ 0 & 1 & x_5 & y_5 & z_5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 & 0 \\ 0 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 \\ 0 & 0 & \neq 0 & -y_1 + y_3 & -z_1 + z_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -y_2 + y_4 & -z_2 + z_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -y_1 + y_5 & -z_1 + z_5 & 0 \end{array}\right)$$

Om vektorerna skall vara linjärt oberoende måste vi ha entydighetstrappa.
Välj första utfyllnadsvektorn så att den bryter mot 1:a och uppfyller de andra ekvationerna.

Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

Tänk dig att du fyller ut med tre godtyckliga vektorer

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \quad (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5), \quad (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5).$$

Ställ nu upp beroendeekvationen för dessa fem vektorer och gör samma radoperationer som då vi löste beroendeekvationen. Då fås

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 \\ 1 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 & 0 \\ 0 & 1 & x_3 & y_3 & z_3 & 0 \\ 1 & 1 & x_4 & y_4 & z_4 & 0 \\ 0 & 1 & x_5 & y_5 & z_5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 & 0 \\ 0 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 \\ 0 & 0 & \neq 0 & -y_1 + y_3 & -z_1 + z_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \neq 0 & -z_2 + z_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -z_1 + z_5 & 0 \end{array}\right)$$

Om vektorerna skall vara linjärt oberoende måste vi ha entydighetstrappa.
Välj första utfyllnadsvektorn så att den bryter mot 1:a och uppfyller de andra ekvationerna. Välj andra så att vi bryter mot en och uppfyller nästa

Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

Tänk dig att du fyller ut med tre godtyckliga vektorer

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \quad (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5), \quad (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5).$$

Ställ nu upp beroendeekvationen för dessa fem vektorer och gör samma radoperationer som
då vi löste beroendeekvationen. Då fås

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 \\ 1 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 & 0 \\ 0 & 1 & x_3 & y_3 & z_3 & 0 \\ 1 & 1 & x_4 & y_4 & z_4 & 0 \\ 0 & 1 & x_5 & y_5 & z_5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 & 0 \\ 0 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 \\ 0 & 0 & \neq 0 & -y_1 + y_3 & -z_1 + z_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \neq 0 & -z_2 + z_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -z_1 + z_5 & 0 \end{array}\right)$$

Om vektorerna skall vara linjärt oberoende måste vi ha entydighetstrappa.
Välj första utfyllnadsvektorn så att den bryter mot 1:a och uppfyller de andra ekvationerna. Välj andra så att vi bryter mot en och uppfyller nästa för att slutligen bryta mot den återstående ekvationen.

Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

Tänk dig att du fyller ut med tre godtyckliga vektorer

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \quad (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5), \quad (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5).$$

Ställ nu upp beroendeekvationen för dessa fem vektorer och gör samma radoperationer som
då vi löste beroendeekvationen. Då fås

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 \\ 1 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 & 0 \\ 0 & 1 & x_3 & y_3 & z_3 & 0 \\ 1 & 1 & x_4 & y_4 & z_4 & 0 \\ 0 & 1 & x_5 & y_5 & z_5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 & 0 \\ 0 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 \\ 0 & 0 & \neq 0 & -y_1 + y_3 & -z_1 + z_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \neq 0 & -z_2 + z_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \neq 0 & 0 \end{array}\right)$$

Om vektorerna skall vara linjärt oberoende måste vi ha entydighetstrappa.
Välj första utfyllnadsvektorn så att den bryter mot 1:a och uppfyller de andra ekvationerna. Välj andra så att vi bryter mot en och uppfyller nästa för att slutligen bryta mot den återstående ekvationen.

Exempel 1: Banta ner och fylla ut.

Tänk dig att du fyller ut med tre godtyckliga vektorer

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \quad (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5), \quad (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5).$$

Ställ nu upp beroendeekvationen för dessa fem vektorer och gör samma radoperationer som då vi löste beroendeekvationen. Då fås

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 \\ 1 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 & 0 \\ 0 & 1 & x_3 & y_3 & z_3 & 0 \\ 1 & 1 & x_4 & y_4 & z_4 & 0 \\ 0 & 1 & x_5 & y_5 & z_5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 & 0 \\ 0 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 \\ 0 & 0 & \neq 0 & -y_1 + y_3 & -z_1 + z_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \neq 0 & -z_2 + z_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \neq 0 & 0 \end{array}\right)$$

Om vektorerna skall vara linjärt oberoende måste vi ha entydighetstrappa.
Välj första utfyllnadsvektorn så att den bryter mot 1:a och uppfyller de andra ekvationerna. Välj andra så att vi bryter mot en och uppfyller nästa för att slutligen bryta mot den återstående ekvationen.
Välj, t ex

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1, 0, 0), \quad \mathbf{v}_4 = \mathbf{e}_4 = (0, 0, 0, 1, 0), \quad \mathbf{v}_5 = \mathbf{e}_5 = (0, 0, 0, 0, 1),$$