Exempel 2: Gram-Schmidt, projektion på underrum.

Låt $\mathbb{U}$ vara underrummet i Exempel 1, d v s $\mathbb{U} = [(0,1,0,1,0),(1,1,1,1,1)]$.

Exempel 2: Gram-Schmidt, projektion på underrum.

Låt $\mathbb{U}$ vara underrummet i Exempel 1, d v s $\mathbb{U} = [(0,1,0,1,0),(1,1,1,1,1)]$. Bestäm en ON-bas i $\mathbb{U}$.

Exempel 2: Gram-Schmidt, projektion på underrum.

Låt $\mathbb{U}$ vara underrummet i Exempel 1, d v s $\mathbb{U} = [(0,1,0,1,0),(1,1,1,1,1)]$. Bestäm en ON-bas i $\mathbb{U}$.

Lösning: Kalla de genererande vektorerna $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$.

Exempel 2: Gram-Schmidt, projektion på underrum.

Låt $\mathbb{U}$ vara underrummet i Exempel 1, d v s $\mathbb{U} = [(0,1,0,1,0),(1,1,1,1,1)]$. Bestäm en ON-bas i $\mathbb{U}$.

Lösning: Kalla de genererande vektorerna $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$. Då de inte är ortogonala mot varann normerar vi en och väljer som $\mathbf{f}_1$

Exempel 2: Gram-Schmidt, projektion på underrum.

Låt $\mathbb{U}$ vara underrummet i Exempel 1, d v s $\mathbb{U} = [(0,1,0,1,0),(1,1,1,1,1)]$. Bestäm en ON-bas i $\mathbb{U}$.

Lösning: Kalla de genererande vektorerna $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$. Då de inte är ortogonala mot varann normerar vi en och väljer som $\mathbf{f}_1$ och ortogonaliserar den andra.

Exempel 2: Gram-Schmidt, projektion på underrum.

Låt $\mathbb{U}$ vara underrummet i Exempel 1, d v s $\mathbb{U} = [(0,1,0,1,0),(1,1,1,1,1)]$. Bestäm en ON-bas i $\mathbb{U}$.

Lösning: Kalla de genererande vektorerna $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$. Då de inte är ortogonala mot varann normerar vi en och väljer som $\mathbf{f}_1$ och ortogonaliserar den andra. Vi väljer

$$\mathbf{f}_1 = \widehat{\mathbf{u}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1,0)$$

Exempel 2: Gram-Schmidt, projektion på underrum.

Låt $\mathbb{U}$ vara underrummet i Exempel 1, d v s $\mathbb{U} = [(0,1,0,1,0),(1,1,1,1,1)]$. Bestäm en ON-bas i $\mathbb{U}$.

Lösning: Kalla de genererande vektorerna $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$. Då de inte är ortogonala mot varann normerar vi en och väljer som $\mathbf{f}_1$ och ortogonaliserar den andra. Vi väljer $\mathbf{f}_1 = \widehat{\mathbf{u}}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1,0)$ och ortogonaliserar sen $\mathbf{u}_2$.

Exempel 2: Gram-Schmidt, projektion på underrum.

Låt $\mathbb{U}$ vara underrummet i Exempel 1, d v s $\mathbb{U} = [(0,1,0,1,0),(1,1,1,1,1)]$. Bestäm en ON-bas i $\mathbb{U}$.

Lösning: Kalla de genererande vektorerna $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$. Då de inte är ortogonala mot varann normerar vi en och väljer som $\mathbf{f}_1$ och ortogonaliserar den andra. Vi väljer $\mathbf{f}_1 = \widehat{\mathbf{u}}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1,0)$ och ortogonaliserar sen $\mathbf{u}_2$. Vi får

$\mathbf{u}_{2\|\mathbf{f}_1}$

Exempel 2: Gram-Schmidt, projektion på underrum.

Låt $\mathbb{U}$ vara underrummet i Exempel 1, d v s $\mathbb{U} = [(0,1,0,1,0),(1,1,1,1,1)]$. Bestäm en ON-bas i $\mathbb{U}$.

Lösning: Kalla de genererande vektorerna $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$. Då de inte är ortogonala mot varann normerar vi en och väljer som $\mathbf{f}_1$ och ortogonaliserar den andra. Vi väljer $\mathbf{f}_1 = \widehat{\mathbf{u}}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1,0)$ och ortogonaliserar sen $\mathbf{u}_2$. Vi får

$$\mathbf{u}_{2_{\|\mathbf{f}_1}} = (\mathbf{u}_2 \bullet \mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1$$

Exempel 2: Gram-Schmidt, projektion på underrum.

Låt $\mathbb{U}$ vara underrummet i Exempel 1, d v s $\mathbb{U} = [(0,1,0,1,0),(1,1,1,1,1)]$. Bestäm en ON-bas i $\mathbb{U}$.

Lösning: Kalla de genererande vektorerna $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$. Då de inte är ortogonala mot varann normerar vi en och väljer som $\mathbf{f}_1$ och ortogonaliserar den andra. Vi väljer $\mathbf{f}_1 = \widehat{\mathbf{u}}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1,0)$ och ortogonaliserar sen $\mathbf{u}_2$. Vi får

$$\mathbf{u}_{2_{\|\mathbf{f}_1}} = (\mathbf{u}_2 \bullet \mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

Exempel 2: Gram-Schmidt, projektion på underrum.

Låt $\mathbb{U}$ vara underrummet i Exempel 1, d v s $\mathbb{U} = [(0,1,0,1,0),(1,1,1,1,1)]$. Bestäm en ON-bas i $\mathbb{U}$.

Lösning: Kalla de genererande vektorerna $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$. Då de inte är ortogonala mot varann normerar vi en och väljer som $\mathbf{f}_1$ och ortogonaliserar den andra. Vi väljer $\mathbf{f}_1 = \widehat{\mathbf{u}}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1,0)$ och ortogonaliserar sen $\mathbf{u}_2$. Vi får

$$\mathbf{u}_{2_{\|\mathbf{f}_1}} = (\mathbf{u}_2 \bullet \mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right) \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

Exempel 2: Gram-Schmidt, projektion på underrum.

Låt $\mathbb{U}$ vara underrummet i Exempel 1, d v s $\mathbb{U} = [(0,1,0,1,0),(1,1,1,1,1)]$. Bestäm en ON-bas i $\mathbb{U}$.

Lösning: Kalla de genererande vektorerna $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$. Då de inte är ortogonala mot varann normerar vi en och väljer som $\mathbf{f}_1$ och ortogonaliserar den andra. Vi väljer $\mathbf{f}_1 = \widehat{\mathbf{u}}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1,0)$ och ortogonaliserar sen $\mathbf{u}_2$. Vi får

$$\mathbf{u}_{2_{\|\mathbf{f}_1}} = (\mathbf{u}_2 \bullet \mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{2}{2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

Exempel 2: Gram-Schmidt, projektion på underrum.

Låt $\mathbb{U}$ vara underrummet i Exempel 1, d v s $\mathbb{U} = [(0,1,0,1,0),(1,1,1,1,1)]$. Bestäm en ON-bas i $\mathbb{U}$.

Lösning: Kalla de genererande vektorerna $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$. Då de inte är ortogonala mot varann normerar vi en och väljer som $\mathbf{f}_1$ och ortogonaliserar den andra. Vi väljer $\mathbf{f}_1 = \widehat{\mathbf{u}}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1,0)$ och ortogonaliserar sen $\mathbf{u}_2$. Vi får

$$\mathbf{u}_{2_{\|\mathbf{f}_1}} = (\mathbf{u}_2 \bullet \mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{2}{2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

Exempel 2: Gram-Schmidt, projektion på underrum.

Låt $\mathbb{U}$ vara underrummet i Exempel 1, d v s $\mathbb{U} = [(0,1,0,1,0),(1,1,1,1,1)]$. Bestäm en ON-bas i $\mathbb{U}$.

Lösning: Kalla de genererande vektorerna $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$. Då de inte är ortogonala mot varann normerar vi en och väljer som $\mathbf{f}_1$ och ortogonaliserar den andra. Vi väljer $\mathbf{f}_1 = \widehat{\mathbf{u}}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1,0)$ och ortogonaliserar sen $\mathbf{u}_2$. Vi får

$$\mathbf{u}_{2_{\|\mathbf{f}_1}} = (\mathbf{u}_2 \bullet \mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{2}{2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_{2_{\perp\mathbf{f}_1}}$$

Exempel 2: Gram-Schmidt, projektion på underrum.

Låt $\mathbb{U}$ vara underrummet i Exempel 1, d v s $\mathbb{U} = [(0,1,0,1,0),(1,1,1,1,1)]$. Bestäm en ON-bas i $\mathbb{U}$.

Lösning: Kalla de genererande vektorerna $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$. Då de inte är ortogonala mot varann normerar vi en och väljer som $\mathbf{f}_1$ och ortogonaliserar den andra. Vi väljer $\mathbf{f}_1 = \widehat{\mathbf{u}}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1,0)$ och ortogonaliserar sen $\mathbf{u}_2$. Vi får

$$\mathbf{u}_{2_{\|\mathbf{f}_1}} = (\mathbf{u}_2 \bullet \mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{2}{2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_{2_{\perp\mathbf{f}_1}} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_{2_{\|\mathbf{f}_1}}$$

Exempel 2: Gram-Schmidt, projektion på underrum.

Låt $\mathbb{U}$ vara underrummet i Exempel 1, d v s $\mathbb{U} = [(0,1,0,1,0),(1,1,1,1,1)]$. Bestäm en ON-bas i $\mathbb{U}$.

Lösning: Kalla de genererande vektorerna $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$. Då de inte är ortogonala mot varann normerar vi en och väljer som $\mathbf{f}_1$ och ortogonaliserar den andra. Vi väljer $\mathbf{f}_1 = \widehat{\mathbf{u}}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1,0)$ och ortogonaliserar sen $\mathbf{u}_2$. Vi får

$$\mathbf{u}_{2_{\|\mathbf{f}_1}} = (\mathbf{u}_2 \bullet \mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{2}{2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_{2_{\perp\mathbf{f}_1}} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_{2_{\|\mathbf{f}_1}} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

Exempel 2: Gram-Schmidt, projektion på underrum.

Låt $\mathbb{U}$ vara underrummet i Exempel 1, d v s $\mathbb{U} = [(0,1,0,1,0),(1,1,1,1,1)]$. Bestäm en ON-bas i $\mathbb{U}$.

Lösning: Kalla de genererande vektorerna $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$. Då de inte är ortogonala mot varann normerar vi en och väljer som $\mathbf{f}_1$ och ortogonaliserar den andra. Vi väljer $\mathbf{f}_1 = \widehat{\mathbf{u}}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1,0)$ och ortogonaliserar sen $\mathbf{u}_2$. Vi får

$$\mathbf{u}_{2_{\|\mathbf{f}_1}} = (\mathbf{u}_2 \bullet \mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{2}{2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_{2_{\perp\mathbf{f}_1}} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_{2_{\|\mathbf{f}_1}} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Exempel 2: Gram-Schmidt, projektion på underrum.

Låt $\mathbb{U}$ vara underrummet i Exempel 1, d v s $\mathbb{U} = [(0,1,0,1,0),(1,1,1,1,1)]$. Bestäm en ON-bas i $\mathbb{U}$.

Lösning: Kalla de genererande vektorerna $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$. Då de inte är ortogonala mot varann normerar vi en och väljer som $\mathbf{f}_1$ och ortogonaliserar den andra. Vi väljer $\mathbf{f}_1 = \widehat{\mathbf{u}}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1,0)$ och ortogonaliserar sen $\mathbf{u}_2$. Vi får

$$\mathbf{u}_{2_{\|\mathbf{f}_1}} = (\mathbf{u}_2 \bullet \mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{2}{2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_{2_{\perp\mathbf{f}_1}} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_{2_{\|\mathbf{f}_1}} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix},$$

$\mathbf{f}_2$

Exempel 2: Gram-Schmidt, projektion på underrum.

Låt $\mathbb{U}$ vara underrummet i Exempel 1, d v s $\mathbb{U} = [(0,1,0,1,0),(1,1,1,1,1)]$. Bestäm en ON-bas i $\mathbb{U}$.

Lösning: Kalla de genererande vektorerna $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$. Då de inte är ortogonala mot varann normerar vi en och väljer som $\mathbf{f}_1$ och ortogonaliserar den andra. Vi väljer $\mathbf{f}_1 = \widehat{\mathbf{u}}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1,0)$ och ortogonaliserar sen $\mathbf{u}_2$. Vi får

$$\mathbf{u}_{2_{\|\mathbf{f}_1}} = (\mathbf{u}_2 \bullet \mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{2}{2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_{2_{\perp\mathbf{f}_1}} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_{2_{\|\mathbf{f}_1}} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_2 = \widehat{\mathbf{u}_{2_{\perp\mathbf{f}_1}}}$$

Exempel 2: Gram-Schmidt, projektion på underrum.

Låt $\mathbb{U}$ vara underrummet i Exempel 1, d v s $\mathbb{U} = [(0,1,0,1,0),(1,1,1,1,1)]$. Bestäm en ON-bas i $\mathbb{U}$.

Lösning: Kalla de genererande vektorerna $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$. Då de inte är ortogonala mot varann normerar vi en och väljer som $\mathbf{f}_1$ och ortogonaliserar den andra. Vi väljer $\mathbf{f}_1 = \widehat{\mathbf{u}}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1,0)$ och ortogonaliserar sen $\mathbf{u}_2$. Vi får

$$\mathbf{u}_{2_{\|\mathbf{f}_1}} = (\mathbf{u}_2 \bullet \mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{2}{2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_{2_{\perp\mathbf{f}_1}} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_{2_{\|\mathbf{f}_1}} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_2 = \widehat{\mathbf{u}_{2_{\perp\mathbf{f}_1}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Exempel 2: Gram-Schmidt, projektion på underrum.

Låt $\mathbb{U}$ vara underrummet i Exempel 1, d v s $\mathbb{U} = [(0,1,0,1,0),(1,1,1,1,1)]$. Bestäm en ON-bas i $\mathbb{U}$.

Lösning: Kalla de genererande vektorerna $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$. Då de inte är ortogonala mot varann normerar vi en och väljer som $\mathbf{f}_1$ och ortogonaliserar den andra. Vi väljer $\mathbf{f}_1 = \widehat{\mathbf{u}}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1,0)$ och ortogonaliserar sen $\mathbf{u}_2$. Vi får

$$\mathbf{u}_{2_{\|\mathbf{f}_1}} = (\mathbf{u}_2 \bullet \mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{2}{2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_{2_{\perp\mathbf{f}_1}} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_{2_{\|\mathbf{f}_1}} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_2 = \widehat{\mathbf{u}_{2_{\perp\mathbf{f}_1}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Därmed har vi att $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ är en ON-bas i $\mathbb{U}$.