Exempel 3: Projektion på underrum, avstånd till underrum.

Låt $\mathbb{U}$ vara som i föregående exempel.

Exempel 3: Projektion på underrum, avstånd till underrum.

Låt $\mathbb{U}$ vara som i föregående exempel. Bestäm ortogonalprojektionen av $\mathbf{v} = (1, 2, 3, 4, 5)$ på $\mathbb{U}$

Exempel 3: Projektion på underrum, avstånd till underrum.

Låt $\mathbb{U}$ vara som i föregående exempel. Bestäm ortogonalprojektionen av $\mathbf{v} = (1, 2, 3, 4, 5)$ på $\mathbb{U}$ och avståndet mellan $\mathbb{U} = \min_{\mathbf{u} \in \mathbb{U}} |\mathbf{v} - \mathbf{u}|$.

Exempel 3: Projektion på underrum, avstånd till underrum.

Låt $\mathbb{U}$ vara som i föregående exempel. Bestäm ortogonalprojektionen av $\mathbf{v} = (1, 2, 3, 4, 5)$ på $\mathbb{U}$ och avståndet mellan $\mathbb{U} = \min_{\mathbf{u} \in \mathbb{U}} |\mathbf{v} - \mathbf{u}|$.

Lösning: I Exempel 2 så tog vi fram en ON-bas i $\mathbb{U}$,

Exempel 3: Projektion på underrum, avstånd till underrum.

Låt $\mathbb{U}$ vara som i föregående exempel. Bestäm ortogonalprojektionen av $\mathbf{v} = (1, 2, 3, 4, 5)$ på $\mathbb{U}$ och avståndet mellan $\mathbb{U} = \min_{\mathbf{u} \in \mathbb{U}} |\mathbf{v} - \mathbf{u}|$.

Lösning: I Exempel 2 så tog vi fram en ON-bas i $\mathbb{U}$,

$\mathbf{f}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, 1, 0)$,

Exempel 3: Projektion på underrum, avstånd till underrum.

Låt $\mathbb{U}$ vara som i föregående exempel. Bestäm ortogonalprojektionen av $\mathbf{v} = (1, 2, 3, 4, 5)$ på $\mathbb{U}$ och avståndet mellan $\mathbb{U} = \min_{\mathbf{u} \in \mathbb{U}} |\mathbf{v} - \mathbf{u}|$.

Lösning: I Exempel 2 så tog vi fram en ON-bas i $\mathbb{U}$,

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, 1, 0), \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 1, 0, 1).$$

Exempel 3: Projektion på underrum, avstånd till underrum.

Låt $\mathbb{U}$ vara som i föregående exempel. Bestäm ortogonalprojektionen av $\mathbf{v} = (1, 2, 3, 4, 5)$ på $\mathbb{U}$ och avståndet mellan $\mathbb{U} = \min_{\mathbf{u} \in \mathbb{U}} |\mathbf{v} - \mathbf{u}|$.

Lösning: I Exempel 2 så tog vi fram en ON-bas i $\mathbb{U}$,
$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, 1, 0), \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 1, 0, 1)$. Enligt **Sats 6.3.9**, sid 146 beräknas $\mathbf{v}$:s ortogonalprojektion på $\mathbb{U}$ som

Exempel 3: Projektion på underrum, avstånd till underrum.

Låt $\mathbb{U}$ vara som i föregående exempel. Bestäm ortogonalprojektionen av $\mathbf{v} = (1, 2, 3, 4, 5)$ på $\mathbb{U}$ och avståndet mellan $\mathbb{U} = \min_{\mathbf{u} \in \mathbb{U}} |\mathbf{v} - \mathbf{u}|$.

Lösning: I Exempel 2 så tog vi fram en ON-bas i $\mathbb{U}$,
$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, 1, 0), \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 1, 0, 1)$. Enligt **Sats 6.3.9**, sid 146 beräknas $\mathbf{v}$:s ortogonalprojektion på $\mathbb{U}$ som $\quad \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} = (\mathbf{v} \bullet \mathbf{f}_1)\, \mathbf{f}_1 + (\mathbf{v} \bullet \mathbf{f}_2)\, \mathbf{f}_2$

Exempel 3: Projektion på underrum, avstånd till underrum.

Låt $\mathbb{U}$ vara som i föregående exempel. Bestäm ortogonalprojektionen av $\mathbf{v} = (1, 2, 3, 4, 5)$ på $\mathbb{U}$ och avståndet mellan $\mathbb{U} = \min_{\mathbf{u} \in \mathbb{U}} |\mathbf{v} - \mathbf{u}|$.

Lösning: I Exempel 2 så tog vi fram en ON-bas i $\mathbb{U}$,
$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, 1, 0)$, $\quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 1, 0, 1)$. Enligt **Sats 6.3.9**, sid 146 beräknas $\mathbf{v}$:s ortogonalprojektion på $\mathbb{U}$ som $\quad \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} = (\mathbf{v} \bullet \mathbf{f}_1)\, \mathbf{f}_1 + (\mathbf{v} \bullet \mathbf{f}_2)\, \mathbf{f}_2 =$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2})^2} \left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exempel 3: Projektion på underrum, avstånd till underrum.

Låt $\mathbb{U}$ vara som i föregående exempel. Bestäm ortogonalprojektionen av $\mathbf{v} = (1, 2, 3, 4, 5)$ på $\mathbb{U}$ och avståndet mellan $\mathbb{U} = \min_{\mathbf{u} \in \mathbb{U}} |\mathbf{v} - \mathbf{u}|$.

Lösning: I Exempel 2 så tog vi fram en ON-bas i $\mathbb{U}$,
$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, 1, 0)$, $\quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 1, 0, 1)$. Enligt **Sats 6.3.9**, sid 146 beräknas $\mathbf{v}$:s ortogonalprojektion på $\mathbb{U}$ som $\quad \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} = (\mathbf{v} \bullet \mathbf{f}_1)\, \mathbf{f}_1 + (\mathbf{v} \bullet \mathbf{f}_2)\, \mathbf{f}_2 =$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2})^2} \left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{(\sqrt{3})^2} \left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exempel 3: Projektion på underrum, avstånd till underrum.

Låt $\mathbb{U}$ vara som i föregående exempel. Bestäm ortogonalprojektionen av $\mathbf{v} = (1, 2, 3, 4, 5)$ på $\mathbb{U}$ och avståndet mellan $\mathbb{U} = \min_{\mathbf{u} \in \mathbb{U}} |\mathbf{v} - \mathbf{u}|$.

Lösning: I Exempel 2 så tog vi fram en ON-bas i $\mathbb{U}$,
$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, 1, 0)$, $\quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 1, 0, 1)$. Enligt **Sats 6.3.9**, sid 146 beräknas $\mathbf{v}$:s ortogonalprojektion på $\mathbb{U}$ som $\quad \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} = (\mathbf{v} \bullet \mathbf{f}_1)\, \mathbf{f}_1 + (\mathbf{v} \bullet \mathbf{f}_2)\, \mathbf{f}_2 =$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2})^2} \left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{(\sqrt{3})^2} \left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{6}{2}\, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exempel 3: Projektion på underrum, avstånd till underrum.

Låt $\mathbb{U}$ vara som i föregående exempel. Bestäm ortogonalprojektionen av $\mathbf{v} = (1, 2, 3, 4, 5)$ på $\mathbb{U}$ och avståndet mellan $\mathbb{U} = \min_{\mathbf{u} \in \mathbb{U}} |\mathbf{v} - \mathbf{u}|$.

Lösning: I Exempel 2 så tog vi fram en ON-bas i $\mathbb{U}$,
$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, 1, 0)$, $\quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 1, 0, 1)$. Enligt **Sats 6.3.9**, sid 146 beräknas
$\mathbf{v}$:s ortogonalprojektion på $\mathbb{U}$ som $\quad \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} = (\mathbf{v} \bullet \mathbf{f}_1)\, \mathbf{f}_1 + (\mathbf{v} \bullet \mathbf{f}_2)\, \mathbf{f}_2 =$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2})^2} \left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{(\sqrt{3})^2} \left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{6}{2}\, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{9}{3}\, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exempel 3: Projektion på underrum, avstånd till underrum.

Låt $\mathbb{U}$ vara som i föregående exempel. Bestäm ortogonalprojektionen av $\mathbf{v} = (1, 2, 3, 4, 5)$ på $\mathbb{U}$ och avståndet mellan $\mathbb{U} = \min_{\mathbf{u} \in \mathbb{U}} |\mathbf{v} - \mathbf{u}|$.

Lösning: I Exempel 2 så tog vi fram en ON-bas i $\mathbb{U}$,
$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, 1, 0)$, $\quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 1, 0, 1)$. Enligt **Sats 6.3.9**, sid 146 beräknas
$\mathbf{v}$:s ortogonalprojektion på $\mathbb{U}$ som $\quad \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} = (\mathbf{v} \bullet \mathbf{f}_1)\, \mathbf{f}_1 + (\mathbf{v} \bullet \mathbf{f}_2)\, \mathbf{f}_2 =$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2})^2} \left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{(\sqrt{3})^2} \left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{6}{2}\, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{9}{3}\, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Exempel 3: Projektion på underrum, avstånd till underrum.

Låt $\mathbb{U}$ vara som i föregående exempel. Bestäm ortogonalprojektionen av $\mathbf{v} = (1, 2, 3, 4, 5)$ på $\mathbb{U}$ och avståndet mellan $\mathbb{U} = \min_{\mathbf{u} \in \mathbb{U}} |\mathbf{v} - \mathbf{u}|$.

Lösning: I Exempel 2 så tog vi fram en ON-bas i $\mathbb{U}$,
$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, 1, 0)$, $\quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 1, 0, 1)$. Enligt **Sats 6.3.9**, sid 146 beräknas $\mathbf{v}$:s ortogonalprojektion på $\mathbb{U}$ som $\quad \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} = (\mathbf{v} \bullet \mathbf{f}_1)\, \mathbf{f}_1 + (\mathbf{v} \bullet \mathbf{f}_2)\, \mathbf{f}_2 =$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2})^2} \left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{(\sqrt{3})^2} \left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{6}{2}\, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{9}{3}\, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Enligt **Sats 6.3.15**, sid 150 är det $\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}$ som ligger närmast $\mathbf{v}$

Exempel 3: Projektion på underrum, avstånd till underrum.

Låt $\mathbb{U}$ vara som i föregående exempel. Bestäm ortogonalprojektionen av $\mathbf{v} = (1, 2, 3, 4, 5)$ på $\mathbb{U}$ och avståndet mellan $\mathbb{U} = \min_{\mathbf{u} \in \mathbb{U}} |\mathbf{v} - \mathbf{u}|$.

Lösning: I Exempel 2 så tog vi fram en ON-bas i $\mathbb{U}$,
$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, 1, 0)$, $\quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 1, 0, 1)$. Enligt **Sats 6.3.9**, sid 146 beräknas $\mathbf{v}$:s ortogonalprojektion på $\mathbb{U}$ som $\quad \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} = (\mathbf{v} \bullet \mathbf{f}_1)\, \mathbf{f}_1 + (\mathbf{v} \bullet \mathbf{f}_2)\, \mathbf{f}_2 =$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2})^2} \left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{(\sqrt{3})^2} \left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{6}{2} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{9}{3} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Enligt **Sats 6.3.15**, sid 150 är det $\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}$ som ligger närmast $\mathbf{v}$ vilket ger

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathbb{U}} |\mathbf{v} - \mathbf{u}| = \left| \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} \right|$$

Exempel 3: Projektion på underrum, avstånd till underrum.

Låt $\mathbb{U}$ vara som i föregående exempel. Bestäm ortogonalprojektionen av $\mathbf{v} = (1, 2, 3, 4, 5)$ på $\mathbb{U}$ och avståndet mellan $\mathbb{U} = \min_{\mathbf{u} \in \mathbb{U}} |\mathbf{v} - \mathbf{u}|$.

Lösning: I Exempel 2 så tog vi fram en ON-bas i $\mathbb{U}$,
$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, 1, 0)$, $\quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 1, 0, 1)$. Enligt **Sats 6.3.9**, sid 146 beräknas $\mathbf{v}$:s ortogonalprojektion på $\mathbb{U}$ som $\quad \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} = (\mathbf{v} \bullet \mathbf{f}_1)\, \mathbf{f}_1 + (\mathbf{v} \bullet \mathbf{f}_2)\, \mathbf{f}_2 =$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2})^2} \left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{(\sqrt{3})^2} \left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{6}{2}\, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{9}{3}\, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Enligt **Sats 6.3.15**, sid 150 är det $\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}$ som ligger närmast $\mathbf{v}$ vilket ger

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathbb{U}} |\mathbf{v} - \mathbf{u}| = \left| \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} \right| = \left| \mathbf{v}_{\perp \mathbb{U}} \right|$$

Exempel 3: Projektion på underrum, avstånd till underrum.

Låt $\mathbb{U}$ vara som i föregående exempel. Bestäm ortogonalprojektionen av $\mathbf{v} = (1, 2, 3, 4, 5)$ på $\mathbb{U}$ och avståndet mellan $\mathbb{U} = \min_{\mathbf{u} \in \mathbb{U}} |\mathbf{v} - \mathbf{u}|$.

Lösning: I Exempel 2 så tog vi fram en ON-bas i $\mathbb{U}$,
$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, 1, 0)$, $\quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 1, 0, 1)$. Enligt **Sats 6.3.9**, sid 146 beräknas $\mathbf{v}$:s ortogonalprojektion på $\mathbb{U}$ som $\quad \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} = (\mathbf{v} \bullet \mathbf{f}_1)\, \mathbf{f}_1 + (\mathbf{v} \bullet \mathbf{f}_2)\, \mathbf{f}_2 =$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2})^2} \left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{(\sqrt{3})^2} \left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{6}{2}\, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{9}{3}\, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Enligt **Sats 6.3.15**, sid 150 är det $\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}$ som ligger närmast $\mathbf{v}$ vilket ger

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathbb{U}} |\mathbf{v} - \mathbf{u}| = \left| \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} \right| = \left| \mathbf{v}_{\perp \mathbb{U}} \right| = \left| \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right|$$

Exempel 3: Projektion på underrum, avstånd till underrum.

Låt $\mathbb{U}$ vara som i föregående exempel. Bestäm ortogonalprojektionen av $\mathbf{v} = (1, 2, 3, 4, 5)$ på $\mathbb{U}$ och avståndet mellan $\mathbb{U} = \min_{\mathbf{u} \in \mathbb{U}} |\mathbf{v} - \mathbf{u}|$.

Lösning: I Exempel 2 så tog vi fram en ON-bas i $\mathbb{U}$,
$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, 1, 0)$, $\quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 1, 0, 1)$. Enligt **Sats 6.3.9**, sid 146 beräknas $\mathbf{v}$:s ortogonalprojektion på $\mathbb{U}$ som $\quad \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} = (\mathbf{v} \bullet \mathbf{f}_1)\, \mathbf{f}_1 + (\mathbf{v} \bullet \mathbf{f}_2)\, \mathbf{f}_2 =$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2})^2} \left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{(\sqrt{3})^2} \left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{6}{2}\, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{9}{3}\, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Enligt **Sats 6.3.15**, sid 150 är det $\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}$ som ligger närmast $\mathbf{v}$ vilket ger

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathbb{U}} |\mathbf{v} - \mathbf{u}| = \left| \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} \right| = \left| \mathbf{v}_{\perp \mathbb{U}} \right| = \left| \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \left| \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right|$$

Exempel 3: Projektion på underrum, avstånd till underrum.

Låt $\mathbb{U}$ vara som i föregående exempel. Bestäm ortogonalprojektionen av $\mathbf{v} = (1, 2, 3, 4, 5)$ på $\mathbb{U}$ och avståndet mellan $\mathbb{U} = \min_{\mathbf{u} \in \mathbb{U}} |\mathbf{v} - \mathbf{u}|$.

Lösning: I Exempel 2 så tog vi fram en ON-bas i $\mathbb{U}$,
$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, 1, 0)$, $\quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 1, 0, 1)$. Enligt **Sats 6.3.9**, sid 146 beräknas $\mathbf{v}$:s ortogonalprojektion på $\mathbb{U}$ som $\quad \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} = (\mathbf{v} \bullet \mathbf{f}_1)\, \mathbf{f}_1 + (\mathbf{v} \bullet \mathbf{f}_2)\, \mathbf{f}_2 =$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2})^2} \left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{(\sqrt{3})^2} \left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{6}{2}\, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{9}{3}\, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Enligt **Sats 6.3.15**, sid 150 är det $\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}$ som ligger närmast $\mathbf{v}$ vilket ger

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathbb{U}} |\mathbf{v} - \mathbf{u}| = \left| \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} \right| = \left| \mathbf{v}_{\perp \mathbb{U}} \right| = \left| \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \left| \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{10}.$$