Definition 5.2.1 En icke-tom mängd $\mathbf{V}$ säges vara ett vektorrum över de reella talen om följande gäller

I. Det finns i $\mathbf{V}$ en operation kallad addition, betecknad + sådan att

$$\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{u}+\mathbf{v}\in\mathbf{V}$$

För $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbf{V}$ har denna addition egenskaperna

1. $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$
2. $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$
3. Finns $\mathbf{0}$ i $\mathbf{V}$ sådan att $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$ för alla $\mathbf{u}$ i $\mathbf{V}$
4. För varje $\mathbf{u}$ i $\mathbf{V}$ finns ett element $-\mathbf{u}$ så att $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$

I. Det finns i V en operation kallad multiplikation med tal, betecknad $\cdot$ sådan att

$$\lambda\in\mathbf{R},\ \mathbf{u}\in\mathbf{V} \Rightarrow \lambda\cdot\mathbf{u}\in\mathbf{V}$$

För $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$ och $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ har denna multiplikation egenskaperna

1. $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$
2. $\lambda(\mu\mathbf{u})=(\lambda\mu)\mathbf{u}$
3. $(\lambda+\mu)\mathbf{u}=\lambda\mathbf{u}+\mu\mathbf{u}$
4. $\lambda(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\lambda\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v}$

Sats 5.3.2. Låt $\mathbf{U}$ vara en icke-tom delmängd av ett vektorrum $\mathbf{V}$. Då är $\mathbf{U}$ ett underrum av $\mathbf{V}$ omm

I. $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{U} \Rightarrow \mathbf{u}+\mathbf{v}\in\mathbf{U}$

1. $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$
2. $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$
3. Finns $\mathbf{0}$ i $\mathbf{U}$ sådan att $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$ för alla $\mathbf{u}$ i $\mathbf{U}$
4. För varje $\mathbf{u}$ i $\mathbf{U}$ finns ett element $-\mathbf{u}$ så att $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$

I. $\lambda\in\mathbf{R}$, $\mathbf{u}\in\mathbf{U} \Rightarrow \lambda\mathbf{u}\in\mathbf{U}$

1. $\lambda(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\lambda\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v}$
2. $(\lambda+\mu)\mathbf{u}=\lambda\mathbf{u}+\mu\mathbf{u}$
3. $\lambda(\mu\mathbf{u})=(\lambda\mu)\mathbf{u}$
4. $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$

Definition 5.3.8.

Låt $\mathbf{V}$ vara ett vektorrum och $M=\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots ,\mathbf{v}_n\}\subset\mathbf{V}$. Låt $\lambda_1, \lambda_2, \ldots ,\lambda_n \in\mathbf{R}$. Då kallas

$$\lambda_1\mathbf{v}_1+\lambda_2\mathbf{v}_2+\ldots+\lambda_n\mathbf{v}_n$$

en *linjärkombination* av M.

Mängden av *alla* linjärkombinationer av M kallas *linjära höljet* av M och betecknas $[M]$ alternativt $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots ,\mathbf{v}_n]$.

Sats 5.3.16 (Satsen om löjliga element)

Låt $\mathbf{V}$ vara ett vektorrum och antag att

$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_n \in \mathbf{V}$. Då gäller

$\mathbf{v}_n \in [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}] \Rightarrow$

$$\Rightarrow [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_n] = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}],$$

dvs om någon av de genererande vektorerna är en linjärkombination av de andra så kan den strykas utan att höljet ändras

Definition 5.4.1. Linjärt (o)beroende

Låt $\mathbf{V}$ vara ett vektorrum och $M=\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset \mathbf{V}$. Ekvationen

$$\lambda_1\mathbf{v}_1+\lambda_2\mathbf{v}_2+\ldots+\lambda_n\mathbf{v}_n=\mathbf{0},$$

där de obekanta $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ söks, kallas *beroendeekvationen.* Om beroendeekvationen har *fler lösningar* än $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$ säges mängden M vara ***linjärt beroende***.

Om $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$ är *den enda lösningen* säger vi att M är ***linjärt oberoende***.

Sats 5.4.4.

Låt $\mathbf{V}$ vara ett vektorrum och $M=\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset \mathbf{V}$. Då gäller

M är linjärt beroende

$$\Leftrightarrow$$

M innehåller minst ett löjligt element

Basbegreppet

- Entydigt spänna upp ett rum
- Dimension
  - För många är beroende
  - För få spänner inte upp
  - Rätt antal oberoende är bas
- Banta ned och fylla ut
  - Banta med SOLE (satsen om löjliga element)
  - Fyll ut med Plus-satsen
  - SORAE visar när vi är klara

Euklidiska rum

Mål: Införa geometri i vektorrum som inte har nåt naturligt längdbegrepp, tex polynomrum.

Hur: Införa skalärprodukt för att beräkna längder definiera ortogonalitet, mm.

?? Har ju varken längd eller vinkel ??

Imitera! Tag egenskaperna hos skalärprodukten i 2- och 3-dim som definition.

Definition av skalärprodukt

Definition 6.2.1. En *skalärprodukt* på ett vektorrum $\mathbb{V}$ är en funktion som till varje par av vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ordnar ett reellt tal betecknat $(\mathbf{u}|\mathbf{v})$ med följande egenskaper:

(i) $(\mathbf{u}|\mathbf{v}) = (\mathbf{v}|\mathbf{u})$ (Kommutativa lagen)

(ii) $(\mathbf{u}|\mathbf{v}+\mathbf{w}) = (\mathbf{u}|\mathbf{v}) + (\mathbf{u}|\mathbf{w})$ (Distributiva lagen)

(iii) $(\mathbf{u}|\lambda\mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u}|\mathbf{v})$

(iv) $(\mathbf{u}|\mathbf{u}) \geq 0$

(v) $(\mathbf{u}|\mathbf{u}) = 0 \Longrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$

för alla $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{V}$ och $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ett vektorrum försett med en skalärprodukt kallas ett *euklidiskt rum*.

Fortsätt imitera

Definition 6.2.6. Låt $\mathbb{E}$ vara ett euklidiskt rum och $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}$.

(a) Längden av $\mathbf{u}$ betecknas $|\mathbf{u}|$ och definieras som

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{(\mathbf{u}|\mathbf{u})}.$$

(b) Avståndet mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ definieras som $|\mathbf{u}-\mathbf{v}| = \sqrt{(\mathbf{u}-\mathbf{v}|\mathbf{u}-\mathbf{v})}$.

(c) $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ säges vara ortogonala om $(\mathbf{u}|\mathbf{v}) = 0$.

ON-baser

- Konstruktion av ON-baser
  - Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess
  - Projektion på underrum
- Minsta avstånd = ortogonalt avstånd
- Minsta-kvadratmetoden: ortogonalprojektion utan ON-bas

Korollarium 6.3.3. *Om* $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\} \subset \mathbb{E}$ *är en ON-mängd och* $\dim \mathbb{E} = m$ *så är* $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ *en ON-bas, d v s en ON-mängd med rätt antal element är en ON-bas.*

Ortogonal projektion på underrum

Sats 6.3.9. *Låt $\mathbb{U}$ vara ett underrum av ett euklidiskt rum $\mathbb{E}$ och låt $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ vara en ON-bas i $\mathbb{U}$. Varje vektor i $\mathbf{v} \in \mathbb{E}$ kan på ett och endast ett sätt skrivas på formen*

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel\mathbb{U}} + \mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}} \quad \text{där} \quad \mathbf{v}_{\parallel\mathbb{U}} \in \mathbb{U} \quad \text{och} \quad \mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}} \in \mathbb{U}^{\perp}.$$

Vidare,

$$\mathbf{v}_{\parallel\mathbb{U}} = (\mathbf{v}|\mathbf{u}_1)\,\mathbf{u}_1 + \ldots + (\mathbf{v}|\mathbf{u}_m)\,\mathbf{u}_m \tag{6.3.5}$$

och vi kallar $\mathbf{v}_{\parallel\mathbb{U}}$ den ortogonala projektionen *på $\mathbb{U}$.*

- ***OBS!! Krävs ON-bas!!!***
- Notera att varje term i projektionen är ortogonalprojektion på EN basvektor i ***ON-basen***

Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess

I. Normera

II. Fyll ut

III. Projicera

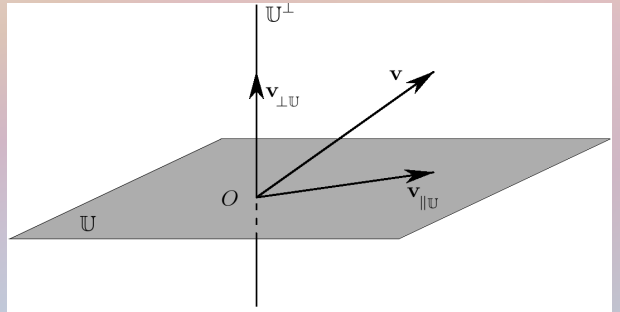
IV. Subtrahera

V. Goto I.

Ortogonalt komplement

Definition 6.3.6. Låt $\mathbb{U}$ vara ett underrum av ett euklidiskt rum $\mathbb{E}$. Det *ortogonala komplementet* till $\mathbb{U}$ definieras som

$$\mathbb{U}^{\perp} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{E}\colon\ (\mathbf{v}|\mathbf{u}) = 0 \quad \text{för alla} \quad \mathbf{u} \in \mathbb{U}\}.$$



Figur 6.2: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel\mathbb{U}} + \mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}}$

Utfyllnad?

Definition 5.4.24. Låt $\mathbb{U}_1$ och $\mathbb{U}_2$ vara underrum av ett vektorrum $\mathbb{V}$. Om $\mathbb{U}_1 \cap \mathbb{U}_2 = \{\mathbf{0}\}$, d v s det enda element som tillhör båda är $\mathbf{0}$, så definierar vi den *direkta summan* av $\mathbb{U}_1$ och $\mathbb{U}_2$, $\mathbb{U}_1 \oplus \mathbb{U}_2$ som

$$\mathbb{U}_1 \oplus \mathbb{U}_2 = \{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \in \mathbb{V}\colon \mathbf{u}_1 \in \mathbb{U}_1, \quad \mathbf{u}_2 \in \mathbb{U}_2\}.$$

Sats 5.4.26. (Multi-Plus-satsen) *Låt $\mathbb{U}_1$, $\dim \mathbb{U}_1 = k$ och $\mathbb{U}_2$, $\dim \mathbb{U}_2 = m$ vara underrum av ett vektorrum $\mathbb{V}$ och antag att $\mathbb{U}_1 \cap \mathbb{U}_2 = \{\mathbf{0}\}$. Då är*

$$\dim(\mathbb{U}_1 \oplus \mathbb{U}_2) = k + m.$$

Vidare, om $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ är en bas i $\mathbb{U}_1$ och $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ är en bas i $\mathbb{U}_2$ så är $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ en bas i $\mathbb{U}_1 \oplus \mathbb{U}_2$.

Korollarium 6.3.11. *Låt $\mathbb{U}$ vara ett underrum av ett euklidiskt rum $\mathbb{E}$. Då gäller att*

$$\mathbb{U} \oplus \mathbb{U}^{\perp} = \mathbb{E}.$$

Minsta-kvadratmetoden

Sats 6.4.1. *Låt A vara en $n\times m$-matris, X en $m\times 1$-matris, Y en $n\times 1$-matris och $\underline{\mathbf{e}}$ standardbasen i $\mathbb{R}^n$. Minstakvadrat-lösningarna till $AX = Y$, d v s de X för vilka $|\underline{\mathbf{e}}Y - \underline{\mathbf{e}}AX|$ är så liten som möjligt, fås genom att lösa* normalekvationerna

$$A^tAX = A^tY.$$

Normalekvationerna är alltid lösbara och om X_0 är en lösning så gäller att
$\underline{\mathbf{e}}AX_0$ *är den ortogonala projektionen av $\underline{\mathbf{e}}Y$ på A:s kolonnrum.*

Definition 7.2.1.

Låt U och V vara två vektorrum. En funktion

F: U → V för vilken gäller att

(a) $F(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v})$ för alla $\mathbf{u},\mathbf{v}\in$U

(b) $F(\lambda\mathbf{u}) = \lambda F(\mathbf{u})$ för alla $\mathbf{u}\in$U och alla $\lambda\in$R

kallas en **linjär avbildning**.

Matriser till linjära avbildningar

Sats 7.3.1. *Låt $\mathbb{U}$ och $\mathbb{V}$ vara vektorrum med $\dim\mathbb{U}=k$ och $\dim\mathbb{V}=r$ och låt*

$$\underline{\mathbf{u}} = (\mathbf{u}_1 \ \dots \ \mathbf{u}_k) \text{ och } \underline{\mathbf{v}} = (\mathbf{v}_1 \ \dots \ \mathbf{v}_r)$$

vara baser i $\mathbb{U}$ resp $\mathbb{V}$.
Då finns till varje linjär avbildning $F\colon\mathbb{U}\to\mathbb{V}$ en entydigt bestämd $r\times k$-matris A sådan att

$$F(\mathbf{u}) = F(\underline{\mathbf{u}}X) = \underline{\mathbf{v}}AX.$$

Sätter vi $F(\mathbf{u}_1) = \underline{\mathbf{v}}Y_1, \dots, F(\mathbf{u}_k) = \underline{\mathbf{v}}Y_k$ så fås

$$A = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ Y_1 & \dots & Y_k \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix},$$

d v s A:s kolonner är koordinatmatriserna för vektorerna $F(\mathbf{u}_1), \dots, F(\mathbf{u}_k)$ i basen $\underline{\mathbf{v}}$ i $\mathbb{V}$.

Nollrum och värderum

Definition 7.5.1. Låt $\mathbb{U}$ och $\mathbb{V}$ vara två vektorrum och $F\colon\mathbb{U}\to\mathbb{V}$ en linjär avbildning. Då definieras *nollrummet* $N(F)$ och *värderummet* $V(F)$ till F som

$$N(F) = \{\mathbf{u}\in\mathbb{U}\colon F(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\} \quad \text{respektive} \quad V(F) = \{F(\mathbf{u})\in\mathbb{V}\colon \mathbf{u}\in\mathbb{U}\}.$$

Sats 7.5.2. *Låt $\mathbb{U}$ och $\mathbb{V}$ vara två vektorrum och $F\colon\mathbb{U}\to\mathbb{V}$ en linjär avbildning. Då gäller att*

(a) *$N(F)$ är ett underrum av $\mathbb{U}$,*

(b) *$V(F)$ är ett underrum av $\mathbb{V}$.*

Sats 7.5.6. (Dimensionssatsen)
Låt $\mathbb{U}$ och $\mathbb{V}$ vara två vektorrum och $F\colon\mathbb{U}\to\mathbb{V}$ en linjär avbildning. Antag att $\dim\mathbb{U} = n$. Då är

$$\dim N(F) + \dim V(F) = n.$$

Beräkning av $N(F)$ och $V(F)$

- $N(F)$?
  - Lös $AX=0$ på vanligt sätt.
- $V(F)$?

Sats 7.5.4. *Låt $\mathbb{U}$ och $\mathbb{V}$ vara två vektorrum och låt $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ vara en bas i $\mathbb{U}$. Betrakta en linjär avbildning $F\colon \mathbb{U} \to \mathbb{V}$. Då gäller att*

$$V(F) = [F(\mathbf{u}_1), \dots, F(\mathbf{u}_k)].$$

$V(F)$?

Sats 7.5.4. *Låt $\mathbb{U}$ och $\mathbb{V}$ vara två vektorrum och låt $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ vara en bas i $\mathbb{U}$. Betrakta en linjär avbildning $F\colon \mathbb{U} \to \mathbb{V}$. Då gäller att*

$$V(F) = [F(\mathbf{u}_1), \dots, F(\mathbf{u}_k)].$$

- Tänk på uppbyggnaden av avbildningsmatrisen!
- $F(\mathbf{u}_i)$:s koordinater är det som står i A:s kolonner.
- För att hitta bas i $V(F)$ behöver löjliga element strykas.
- Beroendeekvationen för $V(F)$ blir $AX=0$.
- Slutligen, vill ha ekvationer för $V(F)$ till kontroll och utfyllnad, dvs vill lösa $AX=Y$.

Basbytesformeln

Sats 7.4.1. *Låt $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ och $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$ vara baser i vektorrummet $\mathbb{V}$, T en $n \times n$-matris sådan att $\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}T$ och $F\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ en linjär avbildning.*
Om F har matrisen $A_{\underline{\mathbf{e}}}$ i basen $\underline{\mathbf{e}}$ och $A_{\underline{\mathbf{f}}}$ i basen $\underline{\mathbf{f}}$ så gäller att

$$A_{\underline{\mathbf{f}}} = T^{-1} A_{\underline{\mathbf{e}}} T.$$

Läs $\underline{\mathbf{fe}}T$-formeln i basbytesformeln

$$\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}T, \qquad A_{\underline{\mathbf{f}}} = T^{-1} A_{\underline{\mathbf{e}}} T$$