Dagens ämnen

- Egenvärden och egenvektorer
  - Egenrum
- Diagonalisering
  - Egenbas
- Sekularpolynomet och sekularekvationen
- Ortogonal diagonalisering

Egenvärden och egenvektorer

Definition 8.1.1. Låt $\mathbb{V}$ vara ett vektorrum och låt $F\colon \mathbb{V}\to\mathbb{V}$ vara en linjär avbildning. Ett tal λ kallas *egenvärde* till F om det finns en vektor $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ sådan att

$$F(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u}.$$

Vektorn $\mathbf{u}$ ovan kallas *egenvektor* med egenvärde λ till F.

Egenrum

Observation: Om **u** och **v** båda är egenvektorer med egenvärde λ till F och $k \epsilon \mathsf{R}$ så gäller

(a) $F(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = F(\mathbf{u})+F(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v}= \lambda(\mathbf{u}+\mathbf{v})$,

(b) $F(k\mathbf{u}) = kF(\mathbf{u}) = k(\lambda\mathbf{u})= \lambda(k\mathbf{u})$,

dvs både $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ och $k\mathbf{u}$ är egenvektorer med egenvärde λ till F. Följaktligen blir mängden av egenvektorer till ett givet egenvärde (+**0**) ett underrum, egenrummet till λ.

Egenbaser och diagonalisering

Definition 8.1.10. Låt $\mathbb{V}$ vara ett vektorrum, $\dim \mathbb{V} < \infty$. En avbildning $F\colon \mathbb{V}\to\mathbb{V}$ kallas *diagonaliserbar* om dess avbildningsmatris, i någon bas, är en diagonalmatris.

Sats 8.1.11. *$F\colon \mathbb{V}\to\mathbb{V}$, $\dim \mathbb{V} < \infty$ är diagonaliserbar omm $\mathbb{V}$ har en bas bestående av egenvektorer till F.*

?????

Vad har detta med diagonal att göra?

Diagonaliserbarhet

Korollarium 8.1.12. *Om F har egenbasen $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ med egenvärden $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ så blir F:s matris $A_{\underline{\mathbf{e}}}$ i denna bas*

$$A_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Sekularpolynomet och sekularekvationen

Sats 8.2.1. *Låt $\mathbb{V}$ vara ett vektorrum, $\dim \mathbb{V} < \infty$ och $F\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ en linjär avbildning med avbildningsmatris A relativt någon bas. Då gäller:*

$$\lambda \text{ är ett egenvärde till } F \iff \det(A - \lambda I) = 0.$$

Vidare, egenvärdena är desamma oavsett relativt vilken bas avbildningsmatrisen är given.

Definition 8.2.2. Låt A vara en $n \times n$-matris. Polynomet $\det(A - \lambda I)$ kallas *sekularpolynomet* till A och ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$ kallas *sekularekvationen.*

Diagonaliserbarhet

Sats 8.2.5. *Låt $\mathbb{V}$ vara ett vektorrum och $F\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ en linjär avbildning. Om $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ är egenvektorer till F med* olika *egenvärden så är $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ linjärt oberoende.*

Korollarium 8.2.6. *Om $F\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$, $\dim \mathbb{V} = n$ har n st olika egenvärden så är F diagonaliserbar.*

Sats 8.2.7. *Låt $F\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$. Om $\mathbf{u}$ är en egenvektor till F med egenvärde λ så är $\mathbf{u}$ en egenvektor till F^n med egenvärde λ^n för varje heltal $n \geq 2$.*

Korollarium 8.2.8. *Om $F\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ är diagonaliserbar så är $F^n\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ diagonaliserbar.*

Diagonaliserbarhet

En matris är alltså diagonaliserbar om den är avbildningsmatris till en linjär avbildning som i någon bas (basen av egenvektorer till A) har en diagonal matris som avbildningsmatris.

Hur avgör man om en avbildning är diagonaliserbar?

Finns tyvärr inget enkelt svar.

Ortogonal diagonalisering

Sats 8.3.1. *Låt* $\mathbb{E}$ *vara ett euklidiskt rum och* $F\colon \mathbb{E}\to\mathbb{E}$ *en* symmetrisk *linjär avbildning. Då är egenvektorer hörande till* olika *egenvärden ortogonala.*

Korollarium 8.3.3. *Låt* $\mathbb{E}$ *vara ett euklidiskt rum och* $F\colon \mathbb{E}\to\mathbb{E}$ *en* symmetrisk *linjär avbildning. Då är* egenrum *hörande till* olika *egenvärden ortogonala.*

Sats 7.7.9. *Låt* $\mathbb{E}$ *vara ett euklidiskt rum och* $F\colon \mathbb{E}\to\mathbb{E}$ *en symmetrisk linjär avbildning. Då gäller att*

$$N(F) = V(F)^{\perp}.$$

Lemma 8.3.7. *Låt* A *vara en reell symmetrisk* $n\times n$*-matris. Då har sekularekvationen,*

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

endast reella rötter.

Ortogonal diagonalisering

Sats 8.3.5. (Spektralsatsen) *Låt* $\mathbb{E}$ *vara ett euklidiskt rum,* $\dim \mathbb{E} < \infty$ *och* $F\colon \mathbb{E}\to\mathbb{E}$ *en linjär avbildning. Då gäller:*

F *är symmetrisk.*

$\Longleftrightarrow$

Det finns en ON-bas i $\mathbb{E}$ *bestående av egenvektorer till* F.

Multipelegenvärden

Sats 8.4.1. *Låt* $F\colon \mathbb{V}\to\mathbb{V}$, $\dim \mathbb{V}=n < \infty$ *vara en linjär avbildning och* λ_0 *ett egenvärde till* F. *Då gäller*

λ_0*'s geometriska multiplicitet* $\leq$ λ_0*'s algebraiska multiplicitet.*

Sats 8.4.3. *Låt* $F\colon \mathbb{V}\to\mathbb{V}$, $\dim \mathbb{V}=n < \infty$ *vara en linjär avbildning och antag att sekularekvationen endast har reella rötter. Då gäller:*

F *är diagonaliserbar*

$\Longleftrightarrow$

de geometriska och algebraiska multipliciteterna är lika för resp egenvärde.