Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

Låt $\mathbb{U}$ vara underrummet från förra exemplet fast flyttat till $\mathbb{R}^5$, d v s

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

Låt $\mathbb{U}$ vara underrummet från förra exemplet fast flyttat till $\mathbb{R}^5$, d v s

$$\mathbb{U} = \Big\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 :$$

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

Låt $\mathbb{U}$ vara underrummet från förra exemplet fast flyttat till $\mathbb{R}^5$, d v s

$$\mathbb{U} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 : \quad -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right.$$

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

Låt $\mathbb{U}$ vara underrummet från förra exemplet fast flyttat till $\mathbb{R}^5$, d v s

$$\mathbb{U} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \colon \begin{array}{rrrrrl} -x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & & = 0 \\ x_1 & & -2x_3 & & +x_5 & = 0 \end{array} \right\}$$

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

Låt $\mathbb{U}$ vara underrummet från förra exemplet fast flyttat till $\mathbb{R}^5$, d v s

$$\mathbb{U} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \colon \begin{array}{rrrrrl} -x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & & = 0 \\ x_1 & & -2x_3 & & +x_5 & = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= [\underbrace{(1,1,1,1,1)}_{\mathbf{u}_1},$$

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

Låt $\mathbb{U}$ vara underrummet från förra exemplet fast flyttat till $\mathbb{R}^5$, d v s

$$\mathbb{U} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \colon \begin{array}{rrrrrl} -x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & & = 0 \\ x_1 & & -2x_3 & & +x_5 & = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= [\underbrace{(1,1,1,1,1)}_{\mathbf{u}_1}, \underbrace{(1,0,1,0,1)}_{\mathbf{u}_2},$$

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

Låt $\mathbb{U}$ vara underrummet från förra exemplet fast flyttat till $\mathbb{R}^5$, d v s

$$\mathbb{U} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \colon \begin{array}{rrrrrl} -x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & & = 0 \\ x_1 & & -2x_3 & & +x_5 & = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= [\underbrace{(1,1,1,1,1)}_{\mathbf{u}_1}, \underbrace{(1,0,1,0,1)}_{\mathbf{u}_2}, \underbrace{(1,0,0,1,-1)}_{\mathbf{u}_3}].$$

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

Låt $\mathbb{U}$ vara underrummet från förra exemplet fast flyttat till $\mathbb{R}^5$, d v s

$$\mathbb{U} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \colon \begin{array}{rrrrrl} -x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & & = 0 \\ x_1 & & -2x_3 & & +x_5 & = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= [\underbrace{(1,1,1,1,1)}_{\mathbf{u}_1}, \underbrace{(1,0,1,0,1)}_{\mathbf{u}_2}, \underbrace{(1,0,0,1,-1)}_{\mathbf{u}_3}].$$

Bestäm en ON-bas i $\mathbb{U}$

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

Låt $\mathbb{U}$ vara underrummet från förra exemplet fast flyttat till $\mathbb{R}^5$, d v s

$$\mathbb{U} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \colon \begin{array}{rrrrrl} -x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & & = 0 \\ x_1 & & -2x_3 & & +x_5 & = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= [\underbrace{(1,1,1,1,1)}_{\mathbf{u}_1}, \underbrace{(1,0,1,0,1)}_{\mathbf{u}_2}, \underbrace{(1,0,0,1,-1)}_{\mathbf{u}_3}].$$

Bestäm en ON-bas i $\mathbb{U}$ och fyll sedan ut till ON-bas i hela $\mathbb{R}^5$.

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

Låt $\mathbb{U}$ vara underrummet från förra exemplet fast flyttat till $\mathbb{R}^5$, d v s

$$\mathbb{U} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \colon \begin{array}{rrrrrl} -x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & & = 0 \\ x_1 & & -2x_3 & & +x_5 & = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= [\underbrace{(1,1,1,1,1)}_{\mathbf{u}_1}, \underbrace{(1,0,1,0,1)}_{\mathbf{u}_2}, \underbrace{(1,0,0,1,-1)}_{\mathbf{u}_3}].$$

Bestäm en ON-bas i $\mathbb{U}$ och fyll sedan ut till ON-bas i hela $\mathbb{R}^5$.

Lösning: Då $\mathbf{u}_2 \perp \mathbf{u}_3$

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

Låt $\mathbb{U}$ vara underrummet från förra exemplet fast flyttat till $\mathbb{R}^5$, d v s

$$\mathbb{U} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \colon \begin{array}{rrrrrl} -x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & & = 0 \\ x_1 & & -2x_3 & & +x_5 & = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= [\underbrace{(1,1,1,1,1)}_{\mathbf{u}_1}, \underbrace{(1,0,1,0,1)}_{\mathbf{u}_2}, \underbrace{(1,0,0,1,-1)}_{\mathbf{u}_3}].$$

Bestäm en ON-bas i $\mathbb{U}$ och fyll sedan ut till ON-bas i hela $\mathbb{R}^5$.

Lösning: Då $\mathbf{u}_2 \perp \mathbf{u}_3$ väljer vi $\quad \mathbf{f}_1 = \widehat{\mathbf{u}}_2$

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

Låt $\mathbb{U}$ vara underrummet från förra exemplet fast flyttat till $\mathbb{R}^5$, d v s

$$\mathbb{U} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \colon \begin{array}{rrrrrl} -x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & & = 0 \\ x_1 & & -2x_3 & & +x_5 & = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= [\underbrace{(1,1,1,1,1)}_{\mathbf{u}_1}, \underbrace{(1,0,1,0,1)}_{\mathbf{u}_2}, \underbrace{(1,0,0,1,-1)}_{\mathbf{u}_3}].$$

Bestäm en ON-bas i $\mathbb{U}$ och fyll sedan ut till ON-bas i hela $\mathbb{R}^5$.

Lösning: Då $\mathbf{u}_2 \perp \mathbf{u}_3$ väljer vi $\quad \mathbf{f}_1 = \widehat{\mathbf{u}}_2\ , \quad \mathbf{f}_2 = \widehat{\mathbf{u}}_3$

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

Låt $\mathbb{U}$ vara underrummet från förra exemplet fast flyttat till $\mathbb{R}^5$, d v s

$$\mathbb{U} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \colon \begin{array}{rrrrrl} -x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & & = 0 \\ x_1 & & -2x_3 & & +x_5 & = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= [\underbrace{(1,1,1,1,1)}_{\mathbf{u}_1}, \underbrace{(1,0,1,0,1)}_{\mathbf{u}_2}, \underbrace{(1,0,0,1,-1)}_{\mathbf{u}_3}].$$

Bestäm en ON-bas i $\mathbb{U}$ och fyll sedan ut till ON-bas i hela $\mathbb{R}^5$.
Lösning: Då $\mathbf{u}_2 \perp \mathbf{u}_3$ väljer vi $\mathbf{f}_1 = \widehat{\mathbf{u}}_2$, $\mathbf{f}_2 = \widehat{\mathbf{u}}_3$ och ortogonaliserar sedan $\mathbf{u}_1$ med Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetod.

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

Låt $\mathbb{U}$ vara underrummet från förra exemplet fast flyttat till $\mathbb{R}^5$, d v s

$$\mathbb{U} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \colon \begin{array}{rrrrrl} -x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & & = 0 \\ x_1 & & -2x_3 & & +x_5 & = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= [\underbrace{(1,1,1,1,1)}_{\mathbf{u}_1}, \underbrace{(1,0,1,0,1)}_{\mathbf{u}_2}, \underbrace{(1,0,0,1,-1)}_{\mathbf{u}_3}].$$

Bestäm en ON-bas i $\mathbb{U}$ och fyll sedan ut till ON-bas i hela $\mathbb{R}^5$.
Lösning: Då $\mathbf{u}_2 \perp \mathbf{u}_3$ väljer vi $\mathbf{f}_1 = \widehat{\mathbf{u}}_2$, $\mathbf{f}_2 = \widehat{\mathbf{u}}_3$ och ortogonaliserar sedan $\mathbf{u}_1$ med Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetod. Vi får

$$\mathbf{u}_{1\|[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]} =$$

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

Låt $\mathbb{U}$ vara underrummet från förra exemplet fast flyttat till $\mathbb{R}^5$, d v s

$$\mathbb{U} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \colon \begin{array}{rrrrrl} -x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & & = 0 \\ x_1 & & -2x_3 & & +x_5 & = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= [\underbrace{(1,1,1,1,1)}_{\mathbf{u}_1}, \underbrace{(1,0,1,0,1)}_{\mathbf{u}_2}, \underbrace{(1,0,0,1,-1)}_{\mathbf{u}_3}].$$

Bestäm en ON-bas i $\mathbb{U}$ och fyll sedan ut till ON-bas i hela $\mathbb{R}^5$.
Lösning: Då $\mathbf{u}_2 \perp \mathbf{u}_3$ väljer vi $\mathbf{f}_1 = \widehat{\mathbf{u}}_2$, $\mathbf{f}_2 = \widehat{\mathbf{u}}_3$ och ortogonaliserar sedan $\mathbf{u}_1$ med Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetod. Vi får

$$\mathbf{u}_{1_{\|[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}} = (\mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{f}_1)\, \mathbf{f}_1$$

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

Låt $\mathbb{U}$ vara underrummet från förra exemplet fast flyttat till $\mathbb{R}^5$, d v s

$$\mathbb{U} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \colon \begin{array}{rrrrrl} -x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & & = 0 \\ x_1 & & -2x_3 & & +x_5 & = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= [\underbrace{(1,1,1,1,1)}_{\mathbf{u}_1}, \underbrace{(1,0,1,0,1)}_{\mathbf{u}_2}, \underbrace{(1,0,0,1,-1)}_{\mathbf{u}_3}].$$

Bestäm en ON-bas i $\mathbb{U}$ och fyll sedan ut till ON-bas i hela $\mathbb{R}^5$.
Lösning: Då $\mathbf{u}_2 \perp \mathbf{u}_3$ väljer vi $\mathbf{f}_1 = \widehat{\mathbf{u}}_2$, $\mathbf{f}_2 = \widehat{\mathbf{u}}_3$ och ortogonaliserar sedan $\mathbf{u}_1$ med Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetod. Vi får

$$\mathbf{u}_{1_{\|[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}} = (\mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1 + (\mathbf{u}_2 \bullet \mathbf{f}_2)\,\mathbf{f}_2$$

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

Låt $\mathbb{U}$ vara underrummet från förra exemplet fast flyttat till $\mathbb{R}^5$, d v s

$$\mathbb{U} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \colon \begin{array}{rcrcrcrcrl} -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = 0 \\ x_1 & & & - & 2x_3 & & & + & x_5 & = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= [\underbrace{(1,1,1,1,1)}_{\mathbf{u}_1}, \underbrace{(1,0,1,0,1)}_{\mathbf{u}_2}, \underbrace{(1,0,0,1,-1)}_{\mathbf{u}_3}].$$

Bestäm en ON-bas i $\mathbb{U}$ och fyll sedan ut till ON-bas i hela $\mathbb{R}^5$.
Lösning: Då $\mathbf{u}_2 \perp \mathbf{u}_3$ väljer vi $\mathbf{f}_1 = \widehat{\mathbf{u}}_2$, $\mathbf{f}_2 = \widehat{\mathbf{u}}_3$ och ortogonaliserar sedan $\mathbf{u}_1$ med Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetod. Vi får

$$\mathbf{u}_{1_{\|[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}} = (\mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1 + (\mathbf{u}_2 \bullet \mathbf{f}_2)\,\mathbf{f}_2 = \frac{1}{(\sqrt{3})^2} \left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

Låt $\mathbb{U}$ vara underrummet från förra exemplet fast flyttat till $\mathbb{R}^5$, d v s

$$\mathbb{U} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \colon \begin{array}{rcrcrcrcrcl} -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 0 \\ x_1 & & & - & 2x_3 & & & + & x_5 & = & 0 \end{array} \right\} =$$

$$= [\underbrace{(1,1,1,1,1)}_{\mathbf{u}_1}, \underbrace{(1,0,1,0,1)}_{\mathbf{u}_2}, \underbrace{(1,0,0,1,-1)}_{\mathbf{u}_3}].$$

Bestäm en ON-bas i $\mathbb{U}$ och fyll sedan ut till ON-bas i hela $\mathbb{R}^5$.
Lösning: Då $\mathbf{u}_2 \perp \mathbf{u}_3$ väljer vi $\mathbf{f}_1 = \widehat{\mathbf{u}}_2$, $\mathbf{f}_2 = \widehat{\mathbf{u}}_3$ och ortogonaliserar sedan $\mathbf{u}_1$ med Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetod. Vi får

$$\mathbf{u}_{1\|[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]} = (\mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1 + (\mathbf{u}_2 \bullet \mathbf{f}_2)\,\mathbf{f}_2 = \frac{1}{(\sqrt{3})^2} \left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

Låt $\mathbb{U}$ vara underrummet från förra exemplet fast flyttat till $\mathbb{R}^5$, d v s

$$\mathbb{U} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \colon \begin{array}{rcrcrcrcrcl} -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 0 \\ x_1 & & & - & 2x_3 & & & + & x_5 & = & 0 \end{array} \right\} =$$

$$= [\underbrace{(1,1,1,1,1)}_{\mathbf{u}_1}, \underbrace{(1,0,1,0,1)}_{\mathbf{u}_2}, \underbrace{(1,0,0,1,-1)}_{\mathbf{u}_3}].$$

Bestäm en ON-bas i $\mathbb{U}$ och fyll sedan ut till ON-bas i hela $\mathbb{R}^5$.
Lösning: Då $\mathbf{u}_2 \perp \mathbf{u}_3$ väljer vi $\mathbf{f}_1 = \widehat{\mathbf{u}}_2$, $\mathbf{f}_2 = \widehat{\mathbf{u}}_3$ och ortogonaliserar sedan $\mathbf{u}_1$ med Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetod. Vi får

$$\mathbf{u}_{1\|[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]} = (\mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1 + (\mathbf{u}_2 \bullet \mathbf{f}_2)\,\mathbf{f}_2 = \frac{1}{(\sqrt{3})^2}\left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{(\sqrt{3})^2}\left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

Låt $\mathbb{U}$ vara underrummet från förra exemplet fast flyttat till $\mathbb{R}^5$, d v s

$$\mathbb{U} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \colon \begin{array}{rcrcrcrcrl} -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = 0 \\ x_1 & & & - & 2x_3 & & & + & x_5 & = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= [\underbrace{(1,1,1,1,1)}_{\mathbf{u}_1}, \underbrace{(1,0,1,0,1)}_{\mathbf{u}_2}, \underbrace{(1,0,0,1,-1)}_{\mathbf{u}_3}].$$

Bestäm en ON-bas i $\mathbb{U}$ och fyll sedan ut till ON-bas i hela $\mathbb{R}^5$.
Lösning: Då $\mathbf{u}_2 \perp \mathbf{u}_3$ väljer vi $\mathbf{f}_1 = \widehat{\mathbf{u}}_2$, $\mathbf{f}_2 = \widehat{\mathbf{u}}_3$ och ortogonaliserar sedan $\mathbf{u}_1$ med Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetod. Vi får

$$\mathbf{u}_{1\|[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]} = (\mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1 + (\mathbf{u}_2 \bullet \mathbf{f}_2)\,\mathbf{f}_2 = \frac{1}{(\sqrt{3})^2}\left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{(\sqrt{3})^2}\left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

Låt $\mathbb{U}$ vara underrummet från förra exemplet fast flyttat till $\mathbb{R}^5$, d v s

$$\mathbb{U} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \colon \begin{array}{rrrrrl} -x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & & = 0 \\ x_1 & & -2x_3 & & +x_5 & = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= [\underbrace{(1,1,1,1,1)}_{\mathbf{u}_1},\ \underbrace{(1,0,1,0,1)}_{\mathbf{u}_2},\ \underbrace{(1,0,0,1,-1)}_{\mathbf{u}_3}].$$

Bestäm en ON-bas i $\mathbb{U}$ och fyll sedan ut till ON-bas i hela $\mathbb{R}^5$.
Lösning: Då $\mathbf{u}_2 \perp \mathbf{u}_3$ väljer vi $\mathbf{f}_1 = \widehat{\mathbf{u}}_2$, $\mathbf{f}_2 = \widehat{\mathbf{u}}_3$ och ortogonaliserar sedan $\mathbf{u}_1$ med Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetod. Vi får

$$\mathbf{u}_{1\|[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]} = (\mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1 + (\mathbf{u}_2 \bullet \mathbf{f}_2)\,\mathbf{f}_2 = \frac{1}{(\sqrt{3})^2}\left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{(\sqrt{3})^2}\left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\,\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

Låt $\mathbb{U}$ vara underrummet från förra exemplet fast flyttat till $\mathbb{R}^5$, d v s

$$\mathbb{U} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \colon \begin{array}{rrrrrl} -x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & & = 0 \\ x_1 & & -2x_3 & & +x_5 & = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= [\underbrace{(1,1,1,1,1)}_{\mathbf{u}_1}, \underbrace{(1,0,1,0,1)}_{\mathbf{u}_2}, \underbrace{(1,0,0,1,-1)}_{\mathbf{u}_3}].$$

Bestäm en ON-bas i $\mathbb{U}$ och fyll sedan ut till ON-bas i hela $\mathbb{R}^5$.
Lösning: Då $\mathbf{u}_2 \perp \mathbf{u}_3$ väljer vi $\mathbf{f}_1 = \widehat{\mathbf{u}}_2$, $\mathbf{f}_2 = \widehat{\mathbf{u}}_3$ och ortogonaliserar sedan $\mathbf{u}_1$ med Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetod. Vi får

$$\mathbf{u}_{1\|[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]} = (\mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1 + (\mathbf{u}_2 \bullet \mathbf{f}_2)\,\mathbf{f}_2 = \frac{1}{(\sqrt{3})^2}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{(\sqrt{3})^2}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\-1\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\-1\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\0\\3\\1\\2\end{pmatrix}$$

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

$\mathbf{u}_{1\perp[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}$

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

$$\mathbf{u}_{1\perp[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_{1\parallel[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}$$

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

$$\mathbf{u}_{1\perp[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_{1\parallel[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]} = \frac{1}{3}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\3\\3\\3\\3\end{pmatrix}\right)$$

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

$$\mathbf{u}_{1_{\perp[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_{1_{\parallel[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}} = \frac{1}{3}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\3\\3\\3\\3\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\0\\3\\1\\2\end{pmatrix}\right)$$

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

$$\mathbf{u}_{1_{\perp[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_{1_{\parallel[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}} = \frac{1}{3}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\3\\3\\3\\3\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\0\\3\\1\\2\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\3\\0\\2\\1\end{pmatrix},$$

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

$$\mathbf{u}_{1\perp[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_{1\parallel[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]} = \frac{1}{3}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\3\\3\\3\\3\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\0\\3\\1\\2\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\3\\0\\2\\1\end{pmatrix},$$

$\mathbf{f}_3$

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

$$\mathbf{u}_{1_{\perp[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_{1_{\parallel[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}} = \frac{1}{3}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\3\\3\\3\\3\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\0\\3\\1\\2\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\3\\0\\2\\1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_3 = \widehat{\mathbf{u}_{1_{\perp[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}}}$$

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

$$\mathbf{u}_{1_{\perp[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_{1_{\parallel[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}} = \frac{1}{3}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\3\\3\\3\\3\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\0\\3\\1\\2\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\3\\0\\2\\1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_3 = \widehat{\mathbf{u}_{1_{\perp[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}}} = \frac{1}{\sqrt{15}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\3\\0\\2\\1\end{pmatrix}.$$

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

$$\mathbf{u}_{1_{\perp[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_{1_{\parallel[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}} = \frac{1}{3}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\3\\3\\3\\3\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\0\\3\\1\\2\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\3\\0\\2\\1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_3 = \widehat{\mathbf{u}_{1_{\perp[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}}} = \frac{1}{\sqrt{15}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\3\\0\\2\\1\end{pmatrix}.$$

För att hitta vektorer att fylla ut med utnyttjar vi det ortogonala komplementet, $\mathbb{U}^{\perp}$.

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

$$\mathbf{u}_{1_{\perp[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_{1_{\parallel[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}} = \frac{1}{3}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\3\\3\\3\\3\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\0\\3\\1\\2\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\3\\0\\2\\1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_3 = \widehat{\mathbf{u}_{1_{\perp[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}}} = \frac{1}{\sqrt{15}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\3\\0\\2\\1\end{pmatrix}.$$

För att hitta vektorer att fylla ut med utnyttjar vi det ortogonala komplementet, $\mathbb{U}^{\perp}$. På lösningsrumsform

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

$$\mathbf{u}_{1_{\perp[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_{1_{\parallel[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}} = \frac{1}{3}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\3\\3\\3\\3\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\0\\3\\1\\2\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\3\\0\\2\\1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_3 = \widehat{\mathbf{u}_{1_{\perp[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}}} = \frac{1}{\sqrt{15}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\3\\0\\2\\1\end{pmatrix}.$$

För att hitta vektorer att fylla ut med utnyttjar vi det ortogonala komplementet, $\mathbb{U}^{\perp}$. På lösningsrumsform har vi

$$\mathbb{U} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \colon \begin{array}{rcrcrcrcrcl} -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 0 \\ x_1 & & & - & 2x_3 & & & + & x_5 & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

$$\mathbf{u}_{1\perp[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}=\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_{1\parallel[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}=\frac{1}{3}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\3\\3\\3\\3\end{pmatrix}-\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\0\\3\\1\\2\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{3}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\3\\0\\2\\1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_3=\widehat{\mathbf{u}_{1\perp[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}}=\frac{1}{\sqrt{15}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\3\\0\\2\\1\end{pmatrix}.$$

För att hitta vektorer att fylla ut med utnyttjar vi det ortogonala komplementet, $\mathbb{U}^\perp$. På lösningsrumsform har vi

$$\mathbb{U}=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^5\colon\ \begin{array}{rcrcrcrcrcl}-x_1&-&x_2&+&x_3&+&x_4&&&=&0\\x_1&&&-&2x_3&&&+&x_5&=&0\end{array}\right\}.$$

Tänk på ekvationerna som ekvationer för plan.

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

$$\mathbf{u}_{1_{\perp[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_{1_{\parallel[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}} = \frac{1}{3}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\3\\3\\3\\3\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\0\\3\\1\\2\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\3\\0\\2\\1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_3 = \widehat{\mathbf{u}_{1_{\perp[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}}} = \frac{1}{\sqrt{15}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\3\\0\\2\\1\end{pmatrix}.$$

För att hitta vektorer att fylla ut med utnyttjar vi det ortogonala komplementet, $\mathbb{U}^\perp$. På lösningsrumsform har vi

$$\mathbb{U} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 : \begin{array}{rcrcrcrcrcl} -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 0 \\ x_1 & & & - & 2x_3 & & & + & x_5 & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Tänk på ekvationerna som ekvationer för plan. Då kan man se $(-1,-1,1,1,0)$ och $(1,0,-2,0,1)$ som normaler

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

$$\mathbf{u}_{1\perp[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}=\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_{1\parallel[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}=\frac{1}{3}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\3\\3\\3\\3\end{pmatrix}-\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\0\\3\\1\\2\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{3}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\3\\0\\2\\1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_3=\widehat{\mathbf{u}_{1\perp[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}}=\frac{1}{\sqrt{15}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\3\\0\\2\\1\end{pmatrix}.$$

För att hitta vektorer att fylla ut med utnyttjar vi det ortogonala komplementet, $\mathbb{U}^\perp$. På lösningsrumsform har vi

$$\mathbb{U}=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^5\colon\ \begin{array}{rcrcrcrcrcl}-x_1&-&x_2&+&x_3&+&x_4&&&=&0\\x_1&&&-&2x_3&&&+&x_5&=&0\end{array}\right\}.$$

Tänk på ekvationerna som ekvationer för plan. Då kan man se $(-1,-1,1,1,0)$ och $(1,0,-2,0,1)$ som normaler och $\mathbb{U}$ som rummet av vektorer som är ortogonala mot dessa.

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

$$\mathbf{u}_{1\perp[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}=\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_{1\parallel[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}=\frac{1}{3}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\3\\3\\3\\3\end{pmatrix}-\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\0\\3\\1\\2\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{3}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\3\\0\\2\\1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_3=\widehat{\mathbf{u}_{1\perp[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}}=\frac{1}{\sqrt{15}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\3\\0\\2\\1\end{pmatrix}.$$

För att hitta vektorer att fylla ut med utnyttjar vi det ortogonala komplementet, $\mathbb{U}^\perp$. På lösningsrumsform har vi

$$\mathbb{U}=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^5\colon\ \begin{array}{rcrcrcrcl}-x_1&-&x_2&+&x_3&+&x_4&&=0\\x_1&&&-&2x_3&&&+&x_5=0\end{array}\right\}.$$

Tänk på ekvationerna som ekvationer för plan. Då kan man se $(-1,-1,1,1,0)$ och $(1,0,-2,0,1)$ som normaler och $\mathbb{U}$ som rummet av vektorer som är ortogonala mot dessa. Följaktligen blir

$$\mathbb{U}^\perp=[(-1,-1,1,1,0),(1,0,-2,0,1)].$$

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

För att få en ON-bas normerar vi en

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

För att få en ON-bas normerar vi en och ortogonaliserar den andra

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

För att få en ON-bas normerar vi en och ortogonaliserar den andra, t ex

$$\mathbf{f}_4 = \frac{1}{2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

För att få en ON-bas normerar vi en och ortogonaliserar den andra, t ex

$$\mathbf{f}_4 = \frac{1}{2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\Big\|\mathbf{f}_4$$

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

För att få en ON-bas normerar vi en och ortogonaliserar den andra, t ex

$$\mathbf{f}_4 = \frac{1}{2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\Big\|_{\mathbf{f}_4} = \frac{1}{4}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

För att få en ON-bas normerar vi en och ortogonaliserar den andra, t ex

$$\mathbf{f}_4 = \frac{1}{2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\Big\|_{\mathbf{f}_4} = \frac{1}{4}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix} = -\frac{3}{4}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix},$$

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

För att få en ON-bas normerar vi en och ortogonaliserar den andra, t ex

$$\mathbf{f}_4 = \frac{1}{2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}_{\|\mathbf{f}_4} = \frac{1}{4}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix} = -\frac{3}{4}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}_{\perp\mathbf{f}_4}$$

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

För att få en ON-bas normerar vi en och ortogonaliserar den andra, t ex

$$\mathbf{f}_4 = \frac{1}{2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}_{\parallel\mathbf{f}_4} = \frac{1}{4}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix} = -\frac{3}{4}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}_{\perp\mathbf{f}_4} = \frac{1}{4}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\0\\-8\\0\\4\end{pmatrix}\right.$$

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

För att få en ON-bas normerar vi en och ortogonaliserar den andra, t ex

$$\mathbf{f}_4 = \frac{1}{2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}_{\parallel\mathbf{f}_4} = \frac{1}{4}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix} = -\frac{3}{4}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}_{\perp\mathbf{f}_4} = \frac{1}{4}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\0\\-8\\0\\4\end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-3\\-3\\3\\3\\0\end{pmatrix}\right)$$

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

För att få en ON-bas normerar vi en och ortogonaliserar den andra, t ex

$$\mathbf{f}_4 = \frac{1}{2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}_{\parallel\mathbf{f}_4} = \frac{1}{4}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix} = -\frac{3}{4}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}_{\perp\mathbf{f}_4} = \frac{1}{4}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\0\\-8\\0\\4\end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-3\\-3\\3\\3\\0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-3\\-5\\3\\4\end{pmatrix},$$

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

För att få en ON-bas normerar vi en och ortogonaliserar den andra, t ex

$$\mathbf{f}_4 = \frac{1}{2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}_{\|\mathbf{f}_4} = \frac{1}{4}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix} = -\frac{3}{4}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}_{\perp\mathbf{f}_4} = \frac{1}{4}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\0\\-8\\0\\4\end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-3\\-3\\3\\3\\0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-3\\-5\\3\\4\end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_5 = \frac{1}{\sqrt{60}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-3\\-5\\3\\4\end{pmatrix}.$$

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

För att få en ON-bas normerar vi en och ortogonaliserar den andra, t ex

$$\mathbf{f}_4 = \frac{1}{2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}_{\|\mathbf{f}_4} = \frac{1}{4}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix} = -\frac{3}{4}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}_{\perp\mathbf{f}_4} = \frac{1}{4}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\0\\-8\\0\\4\end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-3\\-3\\3\\3\\0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-3\\-5\\3\\4\end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_5 = \frac{1}{\sqrt{60}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-3\\-5\\3\\4\end{pmatrix}.$$

Därmed har vi skapat en ON-bas i $\mathbb{U}^{\perp}$

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

För att få en ON-bas normerar vi en och ortogonaliserar den andra, t ex

$$\mathbf{f}_4 = \frac{1}{2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}_{\parallel\mathbf{f}_4} = \frac{1}{4}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix} = -\frac{3}{4}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}_{\perp\mathbf{f}_4} = \frac{1}{4}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\0\\-8\\0\\4\end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-3\\-3\\3\\3\\0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-3\\-5\\3\\4\end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_5 = \frac{1}{\sqrt{60}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-3\\-5\\3\\4\end{pmatrix}.$$

Därmed har vi skapat en ON-bas i $\mathbb{U}^\perp$ och tillsammans med ON-basen i $\mathbb{U}$

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

För att få en ON-bas normerar vi en och ortogonaliserar den andra, t ex

$$\mathbf{f}_4 = \frac{1}{2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}_{\|\mathbf{f}_4} = \frac{1}{4}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix} = -\frac{3}{4}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}_{\perp\mathbf{f}_4} = \frac{1}{4}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\0\\-8\\0\\4\end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-3\\-3\\3\\3\\0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-3\\-5\\3\\4\end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_5 = \frac{1}{\sqrt{60}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-3\\-5\\3\\4\end{pmatrix}.$$

Därmed har vi skapat en ON-bas i $\mathbb{U}^\perp$ och tillsammans med ON-basen i $\mathbb{U}$ har vi en ON-bas i $\mathbb{R}^5$,

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

För att få en ON-bas normerar vi en och ortogonaliserar den andra, t ex

$$\mathbf{f}_4 = \frac{1}{2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}_{\|\mathbf{f}_4} = \frac{1}{4}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix} = -\frac{3}{4}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}_{\perp\mathbf{f}_4} = \frac{1}{4}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\0\\-8\\0\\4\end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-3\\-3\\3\\3\\0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-3\\-5\\3\\4\end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_5 = \frac{1}{\sqrt{60}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-3\\-5\\3\\4\end{pmatrix}.$$

Därmed har vi skapat en ON-bas i $\mathbb{U}^\perp$ och tillsammans med ON-basen i $\mathbb{U}$ har vi en ON-bas i $\mathbb{R}^5$,

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}}_{\mathbf{f}_1},$$

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

För att få en ON-bas normerar vi en och ortogonaliserar den andra, t ex

$$\mathbf{f}_4 = \frac{1}{2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}_{\|\mathbf{f}_4} = \frac{1}{4}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix} = -\frac{3}{4}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}_{\perp\mathbf{f}_4} = \frac{1}{4}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\0\\-8\\0\\4\end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-3\\-3\\3\\3\\0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-3\\-5\\3\\4\end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_5 = \frac{1}{\sqrt{60}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-3\\-5\\3\\4\end{pmatrix}.$$

Därmed har vi skapat en ON-bas i $\mathbb{U}^\perp$ och tillsammans med ON-basen i $\mathbb{U}$ har vi en ON-bas i $\mathbb{R}^5$,

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}}_{\mathbf{f}_1}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}}_{\mathbf{f}_2},$$

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

För att få en ON-bas normerar vi en och ortogonaliserar den andra, t ex

$$\mathbf{f}_4 = \frac{1}{2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}_{\|\mathbf{f}_4} = \frac{1}{4}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix} = -\frac{3}{4}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}_{\perp\mathbf{f}_4} = \frac{1}{4}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\0\\-8\\0\\4\end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-3\\-3\\3\\3\\0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-3\\-5\\3\\4\end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_5 = \frac{1}{\sqrt{60}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-3\\-5\\3\\4\end{pmatrix}.$$

Därmed har vi skapat en ON-bas i $\mathbb{U}^\perp$ och tillsammans med ON-basen i $\mathbb{U}$ har vi en ON-bas i $\mathbb{R}^5$,

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}}_{\mathbf{f}_1}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}}_{\mathbf{f}_2}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{15}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\3\\0\\2\\1\end{pmatrix}}_{\mathbf{f}_3}$$

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

För att få en ON-bas normerar vi en och ortogonaliserar den andra, t ex

$$\mathbf{f}_4 = \frac{1}{2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}_{\|\mathbf{f}_4} = \frac{1}{4}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix} = -\frac{3}{4}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}_{\perp\mathbf{f}_4} = \frac{1}{4}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\0\\-8\\0\\4\end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-3\\-3\\3\\3\\0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-3\\-5\\3\\4\end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_5 = \frac{1}{\sqrt{60}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-3\\-5\\3\\4\end{pmatrix}.$$

Därmed har vi skapat en ON-bas i $\mathbb{U}^\perp$ och tillsammans med ON-basen i $\mathbb{U}$ har vi en ON-bas i $\mathbb{R}^5$,

$$\underbrace{\underset{\mathbf{f}_1}{\frac{1}{\sqrt{3}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}}, \underset{\mathbf{f}_2}{\frac{1}{\sqrt{3}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}}, \underset{\mathbf{f}_3}{\frac{1}{\sqrt{15}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\3\\0\\2\\1\end{pmatrix}}}_{\mathbb{U}}$$

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

För att få en ON-bas normerar vi en och ortogonaliserar den andra, t ex

$$\mathbf{f}_4 = \frac{1}{2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}_{\parallel\mathbf{f}_4} = \frac{1}{4}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix} = -\frac{3}{4}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}_{\perp\mathbf{f}_4} = \frac{1}{4}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\0\\-8\\0\\4\end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-3\\-3\\3\\3\\0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-3\\-5\\3\\4\end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_5 = \frac{1}{\sqrt{60}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-3\\-5\\3\\4\end{pmatrix}.$$

Därmed har vi skapat en ON-bas i $\mathbb{U}^\perp$ och tillsammans med ON-basen i $\mathbb{U}$ har vi en ON-bas i $\mathbb{R}^5$,

$$\underbrace{\underset{\mathbf{f}_1}{\frac{1}{\sqrt{3}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}}, \underset{\mathbf{f}_2}{\frac{1}{\sqrt{3}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}}, \underset{\mathbf{f}_3}{\frac{1}{\sqrt{15}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\3\\0\\2\\1\end{pmatrix}}}_{\mathbb{U}}, \quad \underset{\mathbf{f}_4}{\frac{1}{2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}},$$

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

För att få en ON-bas normerar vi en och ortogonaliserar den andra, t ex

$$\mathbf{f}_4 = \frac{1}{2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}_{\parallel\mathbf{f}_4} = \frac{1}{4}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix} = -\frac{3}{4}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}_{\perp\mathbf{f}_4} = \frac{1}{4}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\0\\-8\\0\\4\end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-3\\-3\\3\\3\\0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-3\\-5\\3\\4\end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_5 = \frac{1}{\sqrt{60}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-3\\-5\\3\\4\end{pmatrix}.$$

Därmed har vi skapat en ON-bas i $\mathbb{U}^\perp$ och tillsammans med ON-basen i $\mathbb{U}$ har vi en ON-bas i $\mathbb{R}^5$,

$$\underbrace{\underset{\mathbf{f}_1}{\frac{1}{\sqrt{3}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}}, \underset{\mathbf{f}_2}{\frac{1}{\sqrt{3}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}}, \underset{\mathbf{f}_3}{\frac{1}{\sqrt{15}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\3\\0\\2\\1\end{pmatrix}}}_{\mathbb{U}}, \quad \underset{\mathbf{f}_4}{\frac{1}{2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}}, \underset{\mathbf{f}_5}{\frac{1}{2\sqrt{15}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-3\\-5\\3\\4\end{pmatrix}}$$

Exempel 2: Skapa ON-bas och fyll ut till ON-bas i hela rummet

För att få en ON-bas normerar vi en och ortogonaliserar den andra, t ex

$$\mathbf{f}_4 = \frac{1}{2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}_{\|\mathbf{f}_4} = \frac{1}{4}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix} = -\frac{3}{4}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}_{\perp\mathbf{f}_4} = \frac{1}{4}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\0\\-8\\0\\4\end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-3\\-3\\3\\3\\0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-3\\-5\\3\\4\end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_5 = \frac{1}{\sqrt{60}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-3\\-5\\3\\4\end{pmatrix}.$$

Därmed har vi skapat en ON-bas i $\mathbb{U}^\perp$ och tillsammans med ON-basen i $\mathbb{U}$ har vi en ON-bas i $\mathbb{R}^5$,

$$\underbrace{\underset{\mathbf{f}_1}{\frac{1}{\sqrt{3}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}}, \underset{\mathbf{f}_2}{\frac{1}{\sqrt{3}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}}, \underset{\mathbf{f}_3}{\frac{1}{\sqrt{15}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\3\\0\\2\\1\end{pmatrix}}}_{\mathbb{U}}, \quad \underbrace{\underset{\mathbf{f}_4}{\frac{1}{2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}}, \underset{\mathbf{f}_5}{\frac{1}{2\sqrt{15}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-3\\-5\\3\\4\end{pmatrix}}}_{\mathbb{U}^\perp}.$$