Exempel 8: Egenvärden och egenvektorer, diagonalisering

Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har i standardbasen matrisen

$$A_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Exempel 8: Egenvärden och egenvektorer, diagonalisering

Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har i standardbasen matrisen

$$A_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bestäm F:s matris i en (ON-)bas av egenvektorer.

Exempel 8: Egenvärden och egenvektorer, diagonalisering

Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har i standardbasen matrisen

$$A_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bestäm F:s matris i en (ON-)bas av egenvektorer.

Lösning: Lös sekularekvationen

Exempel 8: Egenvärden och egenvektorer, diagonalisering

Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har i standardbasen matrisen

$$A_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bestäm F:s matris i en (ON-)bas av egenvektorer.

Lösning: Lös sekularekvationen och bestäm sedan egenvektorerna.

Exempel 8: Egenvärden och egenvektorer, diagonalisering

Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har i standardbasen matrisen

$$A_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bestäm F:s matris i en (ON-)bas av egenvektorer.

Lösning: Lös sekularekvationen och bestäm sedan egenvektorerna.

$$\det(A - \lambda I) =$$

Exempel 8: Egenvärden och egenvektorer, diagonalisering

Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har i standardbasen matrisen

$$A_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bestäm F:s matris i en (ON-)bas av egenvektorer.

Lösning: Lös sekularekvationen och bestäm sedan egenvektorerna.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix}$$

Exempel 8: Egenvärden och egenvektorer, diagonalisering

Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har i standardbasen matrisen

$$A_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bestäm F:s matris i en (ON-)bas av egenvektorer.

Lösning: Lös sekularekvationen och bestäm sedan egenvektorerna.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)(6-\lambda) - 4 =$$

Exempel 8: Egenvärden och egenvektorer, diagonalisering

Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har i standardbasen matrisen

$$A_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bestäm F:s matris i en (ON-)bas av egenvektorer.

Lösning: Lös sekularekvationen och bestäm sedan egenvektorerna.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)(6-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0 \iff$$

Exempel 8: Egenvärden och egenvektorer, diagonalisering

Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har i standardbasen matrisen

$$A_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bestäm F:s matris i en (ON-)bas av egenvektorer.

Lösning: Lös sekularekvationen och bestäm sedan egenvektorerna.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)(6-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0 \iff$$

$$\iff \lambda = 5, 10,$$

Exempel 8: Egenvärden och egenvektorer, diagonalisering

Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har i standardbasen matrisen

$$A_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bestäm F:s matris i en (ON-)bas av egenvektorer.

Lösning: Lös sekularekvationen och bestäm sedan egenvektorerna.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)(6-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0 \iff$$

$$\iff \lambda = 5, 10,$$

$\underline{\underline{\lambda = 5}}$:

Exempel 8: Egenvärden och egenvektorer, diagonalisering

Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har i standardbasen matrisen

$$A_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bestäm F:s matris i en (ON-)bas av egenvektorer.

Lösning: Lös sekularekvationen och bestäm sedan egenvektorerna.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)(6-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0 \iff$$

$$\iff \lambda = 5, 10,$$

$$\underline{\underline{\lambda = 5}}: \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Exempel 8: Egenvärden och egenvektorer, diagonalisering

Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har i standardbasen matrisen

$$A_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bestäm F:s matris i en (ON-)bas av egenvektorer.

Lösning: Lös sekularekvationen och bestäm sedan egenvektorerna.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)(6-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0 \iff$$

$$\iff \lambda = 5, 10,$$

$$\underline{\underline{\lambda = 5}}: \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Exempel 8: Egenvärden och egenvektorer, diagonalisering

Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har i standardbasen matrisen

$$A_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bestäm F:s matris i en (ON-)bas av egenvektorer.

Lösning: Lös sekularekvationen och bestäm sedan egenvektorerna.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)(6-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0 \iff$$

$$\iff \lambda = 5, 10,$$

$$\underline{\underline{\lambda = 5}}: \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_5 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$$

Exempel 8: Egenvärden och egenvektorer, diagonalisering

Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har i standardbasen matrisen

$$A_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bestäm F:s matris i en (ON-)bas av egenvektorer.

Lösning: Lös sekularekvationen och bestäm sedan egenvektorerna.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)(6-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0 \iff$$

$$\iff \lambda = 5, 10,$$

$$\underline{\underline{\lambda = 5}}: \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_5 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{\lambda = 10}}:$$

Exempel 8: Egenvärden och egenvektorer, diagonalisering

Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har i standardbasen matrisen

$$A_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bestäm F:s matris i en (ON-)bas av egenvektorer.

Lösning: Lös sekularekvationen och bestäm sedan egenvektorerna.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)(6-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0 \iff$$

$$\iff \lambda = 5, 10,$$

$$\underline{\underline{\lambda = 5}}: \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_5 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{\lambda = 10}}: \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

Exempel 8: Egenvärden och egenvektorer, diagonalisering

Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har i standardbasen matrisen

$$A_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bestäm F:s matris i en (ON-)bas av egenvektorer.

Lösning: Lös sekularekvationen och bestäm sedan egenvektorerna.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)(6-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0 \iff$$

$$\iff \lambda = 5, 10,$$

$$\underline{\underline{\lambda = 5}}: \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_5 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{\lambda = 10}}: \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Exempel 8: Egenvärden och egenvektorer, diagonalisering

Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har i standardbasen matrisen

$$A_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bestäm F:s matris i en (ON-)bas av egenvektorer.

Lösning: Lös sekularekvationen och bestäm sedan egenvektorerna.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)(6-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0 \iff$$

$$\iff \lambda = 5, 10,$$

$$\underline{\underline{\lambda = 5}}: \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_5 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{\lambda = 10}}: \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_{10} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Exempel 8: Egenvärden och egenvektorer, diagonalisering

Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har i standardbasen matrisen

$$A_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bestäm F:s matris i en (ON-)bas av egenvektorer.

Lösning: Lös sekularekvationen och bestäm sedan egenvektorerna.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)(6-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0 \iff$$

$$\iff \lambda = 5, 10,$$

$$\underline{\underline{\lambda = 5}}: \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_5 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{\lambda = 10}}: \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_{10} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exempel 8: Egenvärden och egenvektorer, diagonalisering

Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har i standardbasen matrisen

$$A_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bestäm F:s matris i en (ON-)bas av egenvektorer.

Lösning: Lös sekularekvationen och bestäm sedan egenvektorerna.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)(6-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0 \iff$$

$$\iff \lambda = 5, 10,$$

$$\underline{\underline{\lambda = 5}}: \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_5 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{\lambda = 10}}: \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_{10} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ F(\mathbf{f}_1) =$$

Exempel 8: Egenvärden och egenvektorer, diagonalisering

Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har i standardbasen matrisen

$$A_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bestäm F:s matris i en (ON-)bas av egenvektorer.

Lösning: Lös sekularekvationen och bestäm sedan egenvektorerna.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)(6-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0 \iff$$

$$\iff \lambda = 5, 10,$$

$$\underline{\underline{\lambda = 5}}: \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_5 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{\lambda = 10}}: \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_{10} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ F(\mathbf{f}_1) = 5\mathbf{f}_1$$

Exempel 8: Egenvärden och egenvektorer, diagonalisering

Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har i standardbasen matrisen

$$A_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bestäm F:s matris i en (ON-)bas av egenvektorer.

Lösning: Lös sekularekvationen och bestäm sedan egenvektorerna.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)(6-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0 \iff$$

$$\iff \lambda = 5, 10,$$

$$\underline{\underline{\lambda = 5}}: \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_5 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{\lambda = 10}}: \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_{10} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ F(\mathbf{f}_1) = 5\mathbf{f}_1 = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Exempel 8: Egenvärden och egenvektorer, diagonalisering

Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har i standardbasen matrisen

$$A_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bestäm F:s matris i en (ON-)bas av egenvektorer.

Lösning: Lös sekularekvationen och bestäm sedan egenvektorerna.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)(6-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0 \iff$$

$$\iff \lambda = 5, 10,$$

$$\underline{\underline{\lambda = 5}}: \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_5 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{\lambda = 10}}: \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_{10} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ F(\mathbf{f}_1) = 5\mathbf{f}_1 = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Exempel 8: Egenvärden och egenvektorer, diagonalisering

Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har i standardbasen matrisen

$$A_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bestäm F:s matris i en (ON-)bas av egenvektorer.

Lösning: Lös sekularekvationen och bestäm sedan egenvektorerna.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)(6-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0 \iff$$

$$\iff \lambda = 5, 10,$$

$$\underline{\underline{\lambda = 5}}: \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_5 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{\lambda = 10}}: \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_{10} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ F(\mathbf{f}_1) = 5\mathbf{f}_1 = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ F(\mathbf{f}_2) =$$

Exempel 8: Egenvärden och egenvektorer, diagonalisering

Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har i standardbasen matrisen

$$A_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bestäm F:s matris i en (ON-)bas av egenvektorer.

Lösning: Lös sekularekvationen och bestäm sedan egenvektorerna.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)(6-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0 \iff$$

$$\iff \lambda = 5, 10,$$

$$\underline{\underline{\lambda = 5}}: \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_5 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{\lambda = 10}}: \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_{10} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ F(\mathbf{f}_1) = 5\mathbf{f}_1 = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ F(\mathbf{f}_2) = 10\mathbf{f}_2$$

Exempel 8: Egenvärden och egenvektorer, diagonalisering

Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har i standardbasen matrisen

$$A_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bestäm F:s matris i en (ON-)bas av egenvektorer.

Lösning: Lös sekularekvationen och bestäm sedan egenvektorerna.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)(6-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0 \iff$$

$$\iff \lambda = 5, 10,$$

$$\underline{\underline{\lambda = 5}}: \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_5 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{\lambda = 10}}: \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_{10} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ F(\mathbf{f}_1) = 5\mathbf{f}_1 = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ F(\mathbf{f}_2) = 10\mathbf{f}_2 = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Exempel 8: Egenvärden och egenvektorer, diagonalisering

Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har i standardbasen matrisen

$$A_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bestäm F:s matris i en (ON-)bas av egenvektorer.

Lösning: Lös sekularekvationen och bestäm sedan egenvektorerna.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)(6-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0 \iff$$

$$\iff \lambda = 5, 10,$$

$$\underline{\underline{\lambda = 5}}: \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_5 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{\lambda = 10}}: \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_{10} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ F(\mathbf{f}_1) = 5\mathbf{f}_1 = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{f}_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ F(\mathbf{f}_2) = 10\mathbf{f}_2 = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} \end{aligned}\right. \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow A_{\underline{\mathbf{f}}} = \begin{pmatrix} 5 & \\ 0 & \end{pmatrix}$$

Exempel 8: Egenvärden och egenvektorer, diagonalisering

Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har i standardbasen matrisen

$$A_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bestäm F:s matris i en (ON-)bas av egenvektorer.

Lösning: Lös sekularekvationen och bestäm sedan egenvektorerna.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)(6-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0 \iff$$

$$\iff \lambda = 5, 10,$$

$$\underline{\underline{\lambda = 5}}: \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_5 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{\lambda = 10}}: \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_{10} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad F(\mathbf{f}_1) = 5\mathbf{f}_1 = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{f}_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad F(\mathbf{f}_2) = 10\mathbf{f}_2 = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} \end{aligned}\right. \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow A_{\underline{\mathbf{f}}} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Exempel 8: Egenvärden och egenvektorer, diagonalisering

Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har i standardbasen matrisen

$$A_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bestäm F:s matris i en (ON-)bas av egenvektorer.

Lösning: Lös sekularekvationen och bestäm sedan egenvektorerna.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)(6-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0 \iff$$

$$\iff \lambda = 5, 10,$$

$$\underline{\underline{\lambda = 5}}: \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_5 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{\lambda = 10}}: \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_{10} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ F(\mathbf{f}_1) = 5\mathbf{f}_1 = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{f}_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ F(\mathbf{f}_2) = 10\mathbf{f}_2 = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} \end{aligned}\right. \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow A_{\underline{\mathbf{f}}} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$