Exempel 9: Kvadratiska former, teckenkaraktär, max/min

§ Låt

$$Q(\mathbf{u}) = Q\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 9x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2.$$

Exempel 9: Kvadratiska former, teckenkaraktär, max/min

§ Låt

$$Q(\mathbf{u}) = Q\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 9x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2.$$

Bestäm Q:s teckenkaraktär

Exempel 9: Kvadratiska former, teckenkaraktär, max/min

§ Låt

$$Q(\mathbf{u}) = Q\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 9x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2.$$

Bestäm Q:s teckenkaraktär samt max- och minvärde då $|\mathbf{u}| = 2$

Exempel 9: Kvadratiska former, teckenkaraktär, max/min

§ Låt

$$Q(\mathbf{u}) = Q\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 9x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2.$$

Bestäm Q:s teckenkaraktär samt max- och minvärde då $|\mathbf{u}| = 2$ samt i vilka punkter dessa antas.

Exempel 9: Kvadratiska former, teckenkaraktär, max/min

§ Låt

$$Q(\mathbf{u}) = Q\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 9x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2.$$

Bestäm Q:s teckenkaraktär samt max- och minvärde då $|\mathbf{u}| = 2$ samt i vilka punkter dessa antas.

Lösning: Skriv Q på (symmetrisk)matrisform och bestäm egenvärden och egenvektorer.

Exempel 9: Kvadratiska former, teckenkaraktär, max/min

§ Låt

$$Q(\mathbf{u}) = Q\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 9x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2.$$

Bestäm Q:s teckenkaraktär samt max- och minvärde då $|\mathbf{u}| = 2$ samt i vilka punkter dessa antas.

Lösning: Skriv Q på (symmetrisk)matrisform och bestäm egenvärden och egenvektorer.

$$Q(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Exempel 9: Kvadratiska former, teckenkaraktär, max/min

§ Låt

$$Q(\mathbf{u}) = Q\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 9x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2.$$

Bestäm Q:s teckenkaraktär samt max- och minvärde då $|\mathbf{u}| = 2$ samt i vilka punkter dessa antas.

Lösning: Skriv Q på (symmetrisk)matrisform och bestäm egenvärden och egenvektorer.

$$Q(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Då matrisen är densamma som föregående uppgift har vi

Exempel 9: Kvadratiska former, teckenkaraktär, max/min

§ Låt

$$Q(\mathbf{u}) = Q\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 9x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2.$$

Bestäm Q:s teckenkaraktär samt max- och minvärde då $|\mathbf{u}| = 2$ samt i vilka punkter dessa antas.

Lösning: Skriv Q på (symmetrisk)matrisform och bestäm egenvärden och egenvektorer.

$$Q(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Då matrisen är densamma som föregående uppgift har vi

$$\lambda = 5,\ \mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

Exempel 9: Kvadratiska former, teckenkaraktär, max/min

§ Låt

$$Q(\mathbf{u}) = Q\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 9x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2.$$

Bestäm Q:s teckenkaraktär samt max- och minvärde då $|\mathbf{u}| = 2$ samt i vilka punkter dessa antas.

Lösning: Skriv Q på (symmetrisk)matrisform och bestäm egenvärden och egenvektorer.

$$Q(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Då matrisen är densamma som föregående uppgift har vi

$$\lambda = 5,\ \mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 10,\ \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exempel 9: Kvadratiska former, teckenkaraktär, max/min

§ Låt

$$Q(\mathbf{u}) = Q\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 9x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2.$$

Bestäm Q:s teckenkaraktär samt max- och minvärde då $|\mathbf{u}| = 2$ samt i vilka punkter dessa antas.

Lösning: Skriv Q på (symmetrisk)matrisform och bestäm egenvärden och egenvektorer.

$$Q(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Då matrisen är densamma som föregående uppgift har vi

$$\lambda = 5,\ \mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 10,\ \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Då egenvärdena är positiva

Exempel 9: Kvadratiska former, teckenkaraktär, max/min

§ Låt

$$Q(\mathbf{u}) = Q\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 9x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2.$$

Bestäm Q:s teckenkaraktär samt max- och minvärde då $|\mathbf{u}| = 2$ samt i vilka punkter dessa antas.

Lösning: Skriv Q på (symmetrisk)matrisform och bestäm egenvärden och egenvektorer.

$$Q(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Då matrisen är densamma som föregående uppgift har vi

$$\lambda = 5,\ \mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 10,\ \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Då egenvärdena är positiva är Q positivt definit.

Exempel 9: Kvadratiska former, teckenkaraktär, max/min

§ Låt

$$Q(\mathbf{u}) = Q\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 9x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2.$$

Bestäm Q:s teckenkaraktär samt max- och minvärde då $|\mathbf{u}| = 2$ samt i vilka punkter dessa antas.
Lösning: Skriv Q på (symmetrisk)matrisform och bestäm egenvärden och egenvektorer.

$$Q(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Då matrisen är densamma som föregående uppgift har vi

$$\lambda = 5,\ \mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 10,\ \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Då egenvärdena är positiva är Q positivt definit. Vidare, **Sats 9.1.11**, sid 227 ger

$$\lambda_{min}\,|\mathbf{u}|^2 = 5{\cdot}2^2 = 20 \leq$$

Exempel 9: Kvadratiska former, teckenkaraktär, max/min

§ Låt

$$Q(\mathbf{u}) = Q\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 9x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2.$$

Bestäm Q:s teckenkaraktär samt max- och minvärde då $|\mathbf{u}| = 2$ samt i vilka punkter dessa antas.

Lösning: Skriv Q på (symmetrisk)matrisform och bestäm egenvärden och egenvektorer.

$$Q(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Då matrisen är densamma som föregående uppgift har vi

$$\lambda = 5,\ \mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 10,\ \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Då egenvärdena är positiva är Q positivt definit. Vidare, **Sats 9.1.11**, sid 227 ger

$$\lambda_{min}\,|\mathbf{u}|^2 = 5{\cdot}2^2 = 20 \leq Q(\mathbf{u})$$

Exempel 9: Kvadratiska former, teckenkaraktär, max/min

§ Låt

$$Q(\mathbf{u}) = Q\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 9x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2.$$

Bestäm Q:s teckenkaraktär samt max- och minvärde då $|\mathbf{u}| = 2$ samt i vilka punkter dessa antas.
Lösning: Skriv Q på (symmetrisk)matrisform och bestäm egenvärden och egenvektorer.

$$Q(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Då matrisen är densamma som föregående uppgift har vi

$$\lambda = 5,\ \mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 10,\ \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Då egenvärdena är positiva är Q positivt definit. Vidare, **Sats 9.1.11**, sid 227 ger

$$\lambda_{min}\,|\mathbf{u}|^2 = 5{\cdot}2^2 = 20 \leq Q(\mathbf{u}) \leq \lambda_{max}\,|\mathbf{u}|^2$$

Exempel 9: Kvadratiska former, teckenkaraktär, max/min

§ Låt

$$Q(\mathbf{u}) = Q\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 9x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2.$$

Bestäm Q:s teckenkaraktär samt max- och minvärde då $|\mathbf{u}| = 2$ samt i vilka punkter dessa antas.
Lösning: Skriv Q på (symmetrisk)matrisform och bestäm egenvärden och egenvektorer.

$$Q(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Då matrisen är densamma som föregående uppgift har vi

$$\lambda = 5,\ \mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 10,\ \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Då egenvärdena är positiva är Q positivt definit. Vidare, **Sats 9.1.11**, sid 227 ger

$$\lambda_{min}\,|\mathbf{u}|^2 = 5{\cdot}2^2 = 20 \leq Q(\mathbf{u}) \leq \lambda_{max}\,|\mathbf{u}|^2 = 10{\cdot}2^2 = 40$$

Exempel 9: Kvadratiska former, teckenkaraktär, max/min

§ Låt

$$Q(\mathbf{u}) = Q\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 9x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2.$$

Bestäm Q:s teckenkaraktär samt max- och minvärde då $|\mathbf{u}| = 2$ samt i vilka punkter dessa antas.
Lösning: Skriv Q på (symmetrisk)matrisform och bestäm egenvärden och egenvektorer.

$$Q(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Då matrisen är densamma som föregående uppgift har vi

$$\lambda = 5,\ \mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 10,\ \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Då egenvärdena är positiva är Q positivt definit. Vidare, **Sats 9.1.11**, sid 227 ger

$$\lambda_{min}\,|\mathbf{u}|^2 = 5{\cdot}2^2 = 20 \leq Q(\mathbf{u}) \leq \lambda_{max}\,|\mathbf{u}|^2 = 10{\cdot}2^2 = 40$$

med lilkhet då $\mathbf{u}$ är en egenvektor

Exempel 9: Kvadratiska former, teckenkaraktär, max/min

§ Låt

$$Q(\mathbf{u}) = Q\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 9x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2.$$

Bestäm Q:s teckenkaraktär samt max- och minvärde då $|\mathbf{u}| = 2$ samt i vilka punkter dessa antas.
Lösning: Skriv Q på (symmetrisk)matrisform och bestäm egenvärden och egenvektorer.

$$Q(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Då matrisen är densamma som föregående uppgift har vi

$$\lambda = 5,\ \mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 10,\ \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Då egenvärdena är positiva är Q positivt definit. Vidare, **Sats 9.1.11**, sid 227 ger

$$\lambda_{min}\,|\mathbf{u}|^2 = 5{\cdot}2^2 = 20 \leq Q(\mathbf{u}) \leq \lambda_{max}\,|\mathbf{u}|^2 = 10{\cdot}2^2 = 40$$

med lilkhet då $\mathbf{u}$ är en egenvektor av rätt längd till respektive egenvärde.

Exempel 9: Kvadratiska former, teckenkaraktär, max/min

§ Låt

$$Q(\mathbf{u}) = Q\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 9x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2.$$

Bestäm Q:s teckenkaraktär samt max- och minvärde då $|\mathbf{u}| = 2$ samt i vilka punkter dessa antas.
Lösning: Skriv Q på (symmetrisk)matrisform och bestäm egenvärden och egenvektorer.

$$Q(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Då matrisen är densamma som föregående uppgift har vi

$$\lambda = 5,\ \mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 10,\ \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Då egenvärdena är positiva är Q positivt definit. Vidare, **Sats 9.1.11**, sid 227 ger

$$\lambda_{min}\,|\mathbf{u}|^2 = 5{\cdot}2^2 = 20 \leq Q(\mathbf{u}) \leq \lambda_{max}\,|\mathbf{u}|^2 = 10{\cdot}2^2 = 40$$

med lilkhet då $\mathbf{u}$ är en egenvektor av rätt längd till respektive egenvärde.
Följaktligen antas minvärdet 20

Exempel 9: Kvadratiska former, teckenkaraktär, max/min

§ Låt

$$Q(\mathbf{u}) = Q\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 9x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2.$$

Bestäm Q:s teckenkaraktär samt max- och minvärde då $|\mathbf{u}| = 2$ samt i vilka punkter dessa antas.
Lösning: Skriv Q på (symmetrisk)matrisform och bestäm egenvärden och egenvektorer.

$$Q(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Då matrisen är densamma som föregående uppgift har vi

$$\lambda = 5,\ \mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 10,\ \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Då egenvärdena är positiva är Q positivt definit. Vidare, **Sats 9.1.11**, sid 227 ger

$$\lambda_{min}\,|\mathbf{u}|^2 = 5{\cdot}2^2 = 20 \leq Q(\mathbf{u}) \leq \lambda_{max}\,|\mathbf{u}|^2 = 10{\cdot}2^2 = 40$$

med lilkhet då $\mathbf{u}$ är en egenvektor av rätt längd till respektive egenvärde.
Följaktligen antas minvärdet 20 för $\mathbf{u}_{min} = \pm 2\mathbf{f}_1$

Exempel 9: Kvadratiska former, teckenkaraktär, max/min

§ Låt

$$Q(\mathbf{u}) = Q\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 9x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2.$$

Bestäm Q:s teckenkaraktär samt max- och minvärde då $|\mathbf{u}| = 2$ samt i vilka punkter dessa antas.
Lösning: Skriv Q på (symmetrisk)matrisform och bestäm egenvärden och egenvektorer.

$$Q(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Då matrisen är densamma som föregående uppgift har vi

$$\lambda = 5,\ \mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 10,\ \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Då egenvärdena är positiva är Q positivt definit. Vidare, **Sats 9.1.11**, sid 227 ger

$$\lambda_{min}\,|\mathbf{u}|^2 = 5{\cdot}2^2 = 20 \leq Q(\mathbf{u}) \leq \lambda_{max}\,|\mathbf{u}|^2 = 10{\cdot}2^2 = 40$$

med lilkhet då $\mathbf{u}$ är en egenvektor av rätt längd till respektive egenvärde.
Följaktligen antas minvärdet 20 för $\mathbf{u}_{min} = \pm 2\mathbf{f}_1$ och maxvärdet 40

Exempel 9: Kvadratiska former, teckenkaraktär, max/min

§ Låt

$$Q(\mathbf{u}) = Q\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 9x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2.$$

Bestäm Q:s teckenkaraktär samt max- och minvärde då $|\mathbf{u}| = 2$ samt i vilka punkter dessa antas.
Lösning: Skriv Q på (symmetrisk)matrisform och bestäm egenvärden och egenvektorer.

$$Q(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Då matrisen är densamma som föregående uppgift har vi

$$\lambda = 5,\ \mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 10,\ \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Då egenvärdena är positiva är Q positivt definit. Vidare, **Sats 9.1.11**, sid 227 ger

$$\lambda_{min}\,|\mathbf{u}|^2 = 5{\cdot}2^2 = 20 \leq Q(\mathbf{u}) \leq \lambda_{max}\,|\mathbf{u}|^2 = 10{\cdot}2^2 = 40$$

med lilkhet då $\mathbf{u}$ är en egenvektor av rätt längd till respektive egenvärde. Följaktligen antas minvärdet 20 för $\mathbf{u}_{min} = \pm 2\mathbf{f}_1$ och maxvärdet 40 för $\mathbf{u}_{max} = \pm 2\mathbf{f}_2$,

Exempel 9: Kvadratiska former, teckenkaraktär, max/min

§ Låt

$$Q(\mathbf{u}) = Q\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 9x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2.$$

Bestäm Q:s teckenkaraktär samt max- och minvärde då $|\mathbf{u}| = 2$ samt i vilka punkter dessa antas.
Lösning: Skriv Q på (symmetrisk)matrisform och bestäm egenvärden och egenvektorer.

$$Q(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Då matrisen är densamma som föregående uppgift har vi

$$\lambda = 5,\ \mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 10,\ \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Då egenvärdena är positiva är Q positivt definit. Vidare, **Sats 9.1.11**, sid 227 ger

$$\lambda_{min}\,|\mathbf{u}|^2 = 5{\cdot}2^2 = 20 \le Q(\mathbf{u}) \le \lambda_{max}\,|\mathbf{u}|^2 = 10{\cdot}2^2 = 40$$

med lilkhet då $\mathbf{u}$ är en egenvektor av rätt längd till respektive egenvärde. Följaktligen antas minvärdet 20 för $\mathbf{u}_{min} = \pm 2\mathbf{f}_1$ och maxvärdet 40 för $\mathbf{u}_{max} = \pm 2\mathbf{f}_2$, dvs

$$\mathbf{u}_{min} = \frac{\pm 2}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

Exempel 9: Kvadratiska former, teckenkaraktär, max/min

§ Låt

$$Q(\mathbf{u}) = Q\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 9x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2.$$

Bestäm Q:s teckenkaraktär samt max- och minvärde då $|\mathbf{u}| = 2$ samt i vilka punkter dessa antas.
Lösning: Skriv Q på (symmetrisk)matrisform och bestäm egenvärden och egenvektorer.

$$Q(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Då matrisen är densamma som föregående uppgift har vi

$$\lambda = 5,\ \mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 10,\ \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Då egenvärdena är positiva är Q positivt definit. Vidare, **Sats 9.1.11**, sid 227 ger

$$\lambda_{min}\,|\mathbf{u}|^2 = 5{\cdot}2^2 = 20 \le Q(\mathbf{u}) \le \lambda_{max}\,|\mathbf{u}|^2 = 10{\cdot}2^2 = 40$$

med lilkhet då $\mathbf{u}$ är en egenvektor av rätt längd till respektive egenvärde. Följaktligen antas minvärdet 20 för $\mathbf{u}_{min} = \pm 2\mathbf{f}_1$ och maxvärdet 40 för $\mathbf{u}_{max} = \pm 2\mathbf{f}_2$, dvs

$$\mathbf{u}_{min} = \frac{\pm 2}{\sqrt{5}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_{max} = \frac{\pm 2}{\sqrt{5}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$