Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Ulf Janfalk

Kurskod: TATA31
Provkod: TEN1

Tentamen i Linjär algebra (TATA31/TEN1) 2018–04–03, 8–13.

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.
För godkänt räcker 9 poäng och minst 3 uppgifter med 2 eller 3 poäng. Godkänd kontrollskrivning ($\geq$ 11p) ht2017 ger 3 poäng på uppgift 1 (som alltså inte behöver lösas) och 16p eller mer ger 4 poäng på uppgift 1. Markera detta genom att skriva ”G” respektive ”G+1” i rutan för uppgift 1.
Fullständiga motiveringar krävs. Lösningar läggs ut efter skrivtidens slut på

http://courses.mai.liu.se/GU/TATA31/tentor.html

Resultat meddelas via e-post inom 10 arbetsdagar.
Alla koordinater för vektorer och punkter är, om ej annat anges, givna med avseende på ett positivt orienterat ON-system, $\mathbb{R}^n$ är ett euklidiskt rum med standardskalärprodukten och standardbasen ett positivt orienterat ON-system.

(1 p) 1. (a) Beräkna avståndet mellan punkten $P = (7, 5, 6)$ och planet Π: $x + 2y + 3z = 5$.

(1 p) (b) Låt A, B, C och X vara matriser av sådana format att ekvationen

$$A^{-1}XB = XB + C$$

är meningsfull. Lös ut X som ett uttryck i A, B och C (de matrisinverser som behövs förutsätts existera).

(1 p) (c) Beräkna

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2\pi & 0 \\ 0 & 0 & -\pi & 0 \\ e & -e & 2e\pi & 3e \\ 3 & -1 & \pi & 1 \end{vmatrix}.$$

(3 p) 2. Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ har i basen $\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix}$ matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 6 \\ 2 & -3 & a \\ -7 & 11 & b \end{pmatrix}.$$

Bestäm $a, b \in \mathbb{R}$ så att $\mathbf{p}_1 = 1 + x^2$ blir en egenvektor. För dessa värden på a och b, ange egenvärdet till $1+x^2$ samt övriga egenvärden och egenvektorer (**som polynom**).

(3 p) 3. Bestäm minsta-kvadratlösningarna till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 2 \\ -x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 = 15 \\ 2x_1 + x_2 = -10 \end{cases}.$$

Utnyttja sedan resultatet till att bestämma ortogonalprojektionen av $\mathbf{v} = (1, 2, 1, 15, -10)$ på underrummet

$$\mathbb{U} = [(1, 2, -1, 2, 2), (3, 1, 1, 4, 1)] \subset \mathbb{R}^5.$$

(3 p) 4. Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ definieras genom

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 + 2x_3 - x_4 - x_5,\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5,\\ x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5, -x_2 - 2x_3 - 2x_5).$$

Bestäm matrisen till F med avseende på standardbaserna i $\mathbb{R}^5$ och $\mathbb{R}^4$. Ange baser i noll- och värderum samt deras respektive dimension.(**OBS!** Det ”konstiga” skrivsättet beror endast på att uttrycket blev för långt för att få plats på en rad.)

5. Låt $\underline{\mathbf{e}}$ vara standardbasen i $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3) = \underline{\mathbf{e}}\,X$ och

$$Q(\mathbf{u}) = Q(\underline{\mathbf{e}}\,X) = 11x_1^2 + 11x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 16x_1x_3 - 16x_2x_3.$$

(2 p) (a) Bestäm det största respektive minsta värdet som $Q(\mathbf{u})$ kan anta då $|\mathbf{u}| = 3$ samt ange i vilka punkter som dessa extremvärden antas.

(1 p) (b) Bestäm minsta avståndet från origo till en punkt på ytan som definieras av $Q(\mathbf{u}) = 3$.

(3 p) 6. Låt $\alpha \in \mathbb{R}$ och $F_\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara en linjär avbildning som i standardbasen har matrisen

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 4 \\ -1 & 3 & \alpha \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

För vilka α är $\dim N(F) > 0$? För det/dessa α, avgör om $(2, 1, \alpha) \in V(F_\alpha)$. För det/de α som $(2, 1, \alpha) \in V(F_\alpha)$, ange alla $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ sådana att $F(\mathbf{u}) = (2, 1, \alpha)$.

(3 p) 7. Låt $F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definieras av att

$$F(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} \quad \text{där} \quad \mathbb{U} = [(1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0)].$$

Bestäm F:s matris i standardbasen. Verifiera att din matris är korrekt genom att med hjälp av matrisen beräkna $F(1, 1, 1, 1)$, $F(1, 0, 1, 0)$, $F(\mathbf{v}_1)$ och $F(\mathbf{v}_2)$ där $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ är två av dig valda lämpliga vektorer. Förklara varför resultaten av dina kontroller måste bli som de blir.

Lösningsförslag till TATA31, Linjär algebra, 2018–04–03

1. (a) Tag en punkt i Π, t ex $P_0 = (2,0,1)$. Sökt avstånd är då $\left|\overline{P_0P}_{\|\mathbf{n}}\right|$ där $\mathbf{n} = (1,2,3)$ är planets normal. Vi får

$$\overline{P_0P} = \overline{OP} - \overline{OP}_0 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}7\\5\\6\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix},$$

$$\overline{P_0P}_{\|\mathbf{n}} = \frac{1}{|\mathbf{n}|^2}\left(\overline{P_0P}\bullet\mathbf{n}\right)\mathbf{n} = \frac{1}{14}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \frac{30}{14}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},$$

$$\left|\overline{P_0P}_{\|\mathbf{n}}\right| = \left|\frac{30}{14}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right| = \frac{30}{14}\left|\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right| = \frac{15}{7}\sqrt{14}$$

(b) Räkna "som vanligt" men håll ordning på från vilket håll du multiplicerar.

$$A^{-1}XB = XB + C \iff A^{-1}XB - XB = \left(A^{-1} - I\right)XB = C \iff$$
$$\iff \left(A^{-1} - I\right)X = CB^{-1} \iff X = \left(A^{-1} - I\right)^{-1}CB^{-1}$$

(c) Räknelagarna för determinanter ger

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\pi & 0\\ 0 & 0 & -\pi & 0\\ e & -e & 2e\pi & 3e\\ 3 & -1 & \pi & 1\end{vmatrix} = \begin{bmatrix}\text{Bryt ut } e \text{ ur rad 3}\\ \text{Utveckla efter rad2}\end{bmatrix} = e(-1)^{2+3}(-\pi)\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 3\\ 3 & -1 & 1\end{vmatrix} \overset{r_2-3r_3}{=}$$

$$= e\pi\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ -8 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 1\end{vmatrix} = \begin{bmatrix}\text{Utveckla efter rad3}\end{bmatrix} =$$

$$= (-1)^{3+1}e\pi\begin{vmatrix}1 & 2\\ -8 & 2\end{vmatrix} = 18e\pi$$

2. Låt $\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix}1 & x & x^2\end{pmatrix}$ vara standardbasen i $\mathbb{P}_2$ och använd definitionen av egenvärde och egenvektor (**Definition** 8.1.1, sid 205). Vi får

$$F(1+x^2) = F\left(\underline{\mathbf{x}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \underline{\mathbf{x}}\begin{pmatrix}-5 & 8 & 6\\ 2 & -3 & a\\ -7 & 11 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \lambda\underline{\mathbf{x}}\begin{pmatrix}1\\2+a\\-7+b\end{pmatrix} = \lambda\underline{\mathbf{x}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \iff$$
$$\iff \lambda = 1,\ a = -2,\ b = 8.$$

Beräkna nu egenvärden och egenvektorer på vanligt sätt.

$$\begin{vmatrix}-5-\lambda & 8 & 6\\ 2 & -3-\lambda & -2\\ -7 & 11 & 8-\lambda\end{vmatrix} \overset{k_1+k_3}{=} \begin{vmatrix}1-\lambda & 8 & 6\\ 0 & -3-\lambda & -2\\ 1-\lambda & 11 & 8-\lambda\end{vmatrix} \overset{r_3-r_1}{=} \begin{vmatrix}1-\lambda & 8 & 6\\ 0 & -3-\lambda & -2\\ 0 & 3 & 2-\lambda\end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix}\lambda+3 & 2\\ -3 & \lambda-2\end{vmatrix} = (1-\lambda)((\lambda+3)(\lambda-2)+6) = (1-\lambda)\left(\lambda^2+\lambda\right) = 0 \iff$$
$$\iff \lambda = 0, \pm 1$$

$$\underline{\underline{\lambda = 0}}: \begin{pmatrix} -5 & 8 & 6 \\ 2 & -3 & -2 \\ -7 & 11 & 8 \end{pmatrix} \overset{\substack{r_2 \leftrightarrow r_1 \\ 2r_2, 2r_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -2 & 0 \\ -10 & 16 & 12 & 0 \\ -14 & 22 & 16 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2+5r_1 \\ r_3+7r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{r_3-r_2}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_0 = t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\underline{\underline{\lambda = -1}}: \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 8 & 6 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \\ -7 & 11 & 9 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2 \leftrightarrow r_1 \\ r_1/2, r_2/2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 & 0 \\ -7 & 11 & 9 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2+2r_1 \\ r_3+7r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{r_3-2r_2}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_{-1} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

d v s 0 och -1 är egenvärden och $2 + 2x - x^2$ är en egenvektor till 0 och $1 - x + 2x^2$ en egenvektor till -1.

3. Skriv på matrisform och ställ upp normalekvationerna, $A^tAX = A^tY$.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 2 \\ -x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 = 15 \\ 2x_1 + x_2 = -10 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 15 \\ -10 \end{pmatrix}}_{Y}$$

$$A^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 14 \\ 14 & 28 \end{pmatrix} = 14 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^tY = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 15 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 56 \end{pmatrix} = 14 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$A^tAX = \cancel{14} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \cancel{14} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = A^tY \iff$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Enligt **Sats 6.4.1**, sid 162 gäller att om X_0 är en lösning till normalekvationerna så är $\underline{\mathbf{e}}\,AX_0$ ortogonalprojektionen av Y på A:s kolonnrum $= \mathbb{U}$ i detta fall. Följaktligen gäller att

$$\underline{\mathbf{e}}\,Y_{\|\mathbb{U}} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 15 \\ -10 \end{pmatrix}_{\|\mathbb{U}} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 5 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

4. Låt $\underline{\mathbf{e}}_5$ vara standardbasen i $\mathbb{R}^5$ och $\underline{\mathbf{e}}_4$ vara standardbasen i $\mathbb{R}^4$. Då fås

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = F\left(\underline{\mathbf{e}}_5\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}\right) = \begin{array}{l}(x_1+2x_3-x_4-x_5,\ x_1+x_2+2x_3+x_4+x_5,\\ x_2+x_3+x_4+2x_5,\ -x_2-2x_3-2x_5).\end{array}$$

$$= \underline{\mathbf{e}}_4\begin{pmatrix}x_1+2x_3-x_4-x_5\\x_1+x_2+2x_3+x_4+x_5\\x_2+x_3+x_4+2x_5\\-x_2-2x_3-2x_5\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}_4\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&2&-1&-1\\1&1&2&1&1\\0&1&1&1&2\\0&-1&-2&0&-2\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}.$$

För att beräkna en bas i $N(F)$ löser vi $AX = 0$ på vanligt sätt.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&2&-1&-1&0\\1&1&2&1&1&0\\0&1&1&1&2&0\\0&-1&-2&0&-2&0\end{array}\right) \overset{r_2-r_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&2&-1&-1&0\\0&1&0&2&2&0\\0&1&1&1&2&0\\0&-1&-2&0&-2&0\end{array}\right) \overset{\substack{r_3-r_2\\r_4+r_2}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&2&-1&-1&0\\0&1&0&2&2&0\\0&0&1&-1&0&0\\0&0&-2&2&0&0\end{array}\right) \overset{\substack{r_1-2r_3\\r_4+2r_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&0&1&-1&0\\0&1&0&2&2&0\\0&0&1&-1&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-s+t\\-2s-2t\\s\\s\\t\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad s,t\in\mathbb{R}.$$

Följaktligen är $(-1,-2,1,1,0)$ och $(1,-2,0,0,1)$ en bas i $N(F)$ och $\dim N(F) = 2$. Enligt **Sats 7.5.4**, sid 181 är $V(F)$ höljet av A:s kolonnvektorer, $\mathbf{k}_1,\dots,\mathbf{k}_5$, och vi ställer därför upp beroendeekvationen för att hitta löjliga element,

$$\lambda_1\mathbf{k}_1 + \lambda_2\mathbf{k}_2 + \lambda_3\mathbf{k}_3 + \lambda_4\mathbf{k}_4 + \lambda_5\mathbf{k}_5 = \mathbf{0}.$$

Då detta är precis den ekvation vi just löst får vi

$$\underline{\underline{s=1,\ t=0}}: \quad -\mathbf{k}_1 - 2\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 = \mathbf{0} \iff \mathbf{k}_4 = \mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3$$
$$\underline{\underline{s=0,\ t=1}}: \quad \mathbf{k}_1 - 2\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_5 = \mathbf{0} \iff \mathbf{k}_5 = -\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2.$$

Följaktligen kan $\mathbf{k}_4$ och $\mathbf{k}_5$ strykas enligt Satsen om löjliga element (**Sats 5.3.16**, sid 111). Vi får

$$V(F) = [\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4,\mathbf{k}_5] = [\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3]$$

så att $(1,1,0,0),(0,1,1,-1),(2,2,1,-2)$ är en bas i $V(F)$ och $\dim V(F) = 3$.

5. Skriv Q på matrisform och bestäm egenvärdena.

$$Q(\mathbf{u}) = Q(\underline{\mathbf{e}}\,X) = 11x_1^2 + 11x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 16x_1x_3 - 16x_2x_3 =$$
$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 11 & -1 & -8 \\ -1 & 11 & -8 \\ -8 & -8 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 11-\lambda & -1 & -8 \\ -1 & 11-\lambda & -8 \\ -8 & -8 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{r_2-r_1}{=} \begin{vmatrix} 11-\lambda & -1 & -8 \\ \lambda-12 & 12-\lambda & 0 \\ -8 & -8 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{k_1+k_1}{=}$$
$$= (\lambda-12) \begin{vmatrix} 10-\lambda & -1 & -8 \\ 0 & -1 & 0 \\ -16 & -8 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-12) \begin{vmatrix} 10-\lambda & -8 \\ -16 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= -(\lambda-12)((10-\lambda)(2-\lambda) - 128) =$$
$$= -(\lambda-12)\left(\lambda^2 - 12\lambda - 108\right) = 0 \iff \lambda = 12, 6 \pm 12 = -6, 12, 18.$$

Vi behöver endast bestämma egenvektorerna till -6 och 18.

$$\underline{\underline{\lambda = -6}} : \left(\begin{array}{ccc|c} 17 & -1 & -8 & 0 \\ -1 & 17 & -8 & 0 \\ -8 & -8 & 8 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r1\leftrightarrow r3 \\ -r_1/8}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 17 & -8 & 0 \\ 17 & -1 & -8 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r2+r_1 \\ r_3-17r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 18 & -9 & 0 \\ 0 & -18 & 9 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2+r_3 \\ r_2/9}}{\sim}$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_{-6} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\underline{\underline{\lambda = 18}} : \left(\begin{array}{ccc|c} -7 & -1 & -8 & 0 \\ -1 & -7 & -8 & 0 \\ -8 & -8 & -16 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{-r1\leftrightarrow r3 \\ -r_1/8,-r_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 8 & 0 \\ 7 & 1 & 8 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r2-r_1 \\ r_3-7r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2+r_3 \\ r_2/6}}{\sim}$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_{18} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_3 \times \mathbf{f}_1 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow Q(\mathbf{u}) = Q(\underline{\mathbf{f}}\,X_{\mathbf{f}}) = -6y_1^2 + 12y_2^2 + 18y_3^2.$$

(a) Med $|\mathbf{u}| = 3$ ger **Sats 9.1.11**, sid 227

$$\lambda_{min} |\mathbf{u}|^2 = -6{\cdot}3^2 = -54 \leq Q(\mathbf{u}) \leq \lambda_{max} |\mathbf{u}|^2 = 18{\cdot}3^2 = 162$$

med likhet i respektive olikhet för en egenvektor av rätt längd till rätt egenvärde. Följaktligen är

$$\max_{|\mathbf{u}|=3} Q(\mathbf{u}) = 168 \quad \text{för} \quad \mathbf{u} = \pm 3\mathbf{f}_3 = \pm(\sqrt{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}),$$
$$\min_{|\mathbf{u}|=3} Q(\mathbf{u}) = -54 \quad \text{för} \quad \mathbf{u} = \pm 3\mathbf{f}_1 = \pm\frac{3}{\sqrt{6}}(1,1,2) = \pm\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{6}\right).$$

(b) Vi betraktar nu *alla* $\mathbf{u}$ sådana att $Q(\mathbf{u}) = 3$. Återanvändning av **Sats 9.1.11**, sid 227 ger i denna situation

$$Q(\mathbf{u}) = 3 \leq 18\,|\mathbf{u}|^2 \iff |\mathbf{u}|^2 \geq \frac{3}{18} = \frac{1}{6} \iff |\mathbf{u}| \geq \frac{1}{\sqrt{6}}$$

med likhet då $\mathbf{u}$ är en egenvektor till 18 av längd precis $1/\sqrt{6}$. Följaktligen, för de punkter $P_\pm$ på ytan som ligger närmast origo gäller

$$\overline{OP}_\pm = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{f}_3 = \pm\frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{3}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \pm\frac{1}{3\sqrt{2}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \quad \text{d v s}$$

$$P_\pm = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$$

och minsta avståndet är $1/\sqrt{6}$.

6. $N(F_\alpha)$ beräknas genom att lösa ekvationen $A_\alpha X = \mathit{0}$. Om $\dim N(F_\alpha) > 0$ så skall ekvationen $A_\alpha X = \mathit{0}$ ha icke-triviala lösningar. Sats 4.7.1 (d), sid 92 ger då att $\det A_\alpha = 0$.

$$\begin{vmatrix}2 & \alpha & 4\\-1 & 3 & \alpha\\3 & -2 & 3\end{vmatrix} \overset{\substack{r_1+2r_2\\r_3+3r_2}}{=} \begin{vmatrix}0 & \alpha+6 & 4+2\alpha\\-1 & 3 & \alpha\\0 & 7 & 3+3\alpha\end{vmatrix} = (-1)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}\alpha+6 & 4+2\alpha\\7 & 3+3\alpha\end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha+6)(3+3\alpha) - 7(4+2\alpha) = 3\alpha^2 + 7\alpha - 10 = 0 \iff \alpha^2 + \frac{7}{3}\alpha - \frac{10}{3} = 0 \iff$$

$$\iff \alpha = -\frac{7}{6} \pm \sqrt{\frac{49}{36} + \frac{10}{3}} = -\frac{7}{6} \pm \sqrt{\frac{169}{36}} = \frac{-7 \pm 13}{6} = 1, -\frac{10}{3}.$$

d v s nollrummet har positiv dimension för $\alpha = 1$ och $-10/3$.
Studera nu $F(\mathbf{u}) = (2, 1, \alpha)$ för $\alpha = 1$ och $-10/3$ var för sig. Vi får systemen

$$\underline{\underline{\alpha = -10/3}}: \left(\begin{array}{ccc|c}2 & -10/3 & 4 & 2\\-1 & 3 & -10/3 & 1\\3 & -2 & 3 & -10/3\end{array}\right) \overset{\substack{3r_1, 3r_2, 3r_3\\r_1 \leftrightarrow r_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c}-3 & 9 & -10 & 3\\6 & -10 & 12 & 6\\9 & -6 & 9 & -10\end{array}\right) \overset{\substack{r_2+2r_1\\r_3+3r_1}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c}-3 & 9 & -10 & 3\\0 & 8 & -8 & 12\\0 & 21 & -21 & -1\end{array}\right) \overset{\substack{r_2/8\\r_3/21}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c}-3 & 9 & -10 & 3\\0 & 1 & -1 & 3/2\\0 & 1 & -1 & -1/21\end{array}\right) \Longrightarrow \text{lösning saknas,}$$

d v s för $\alpha = -10/3$ gäller att $\mathbf{u} = (2, 1, -10/3) \notin V(F)$.

$$\underline{\underline{\alpha = 1}}: \left(\begin{array}{ccc|c}2 & 1 & 4 & 2\\-1 & 3 & 1 & 1\\3 & -2 & 3 & 1\end{array}\right) \overset{\substack{r_1+2r_2\\r_3+3r_2\\r_1 \leftrightarrow r_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 3 & 1 & 1\\0 & 7 & 6 & 4\\0 & 7 & 6 & 4\end{array}\right) \overset{r_3-r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 3 & 1 & 1\\0 & 7 & 6 & 4\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X = \begin{pmatrix}18t + 2/3 - 7t - 1 = -1/3 + 11t\\6t\\2/3 - 7t\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}11\\6\\-7\end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

d v s för $\alpha = 1$ gäller att $\mathbf{u} = (2,1,1) \in V(F)$ och

$$F\left(\frac{1}{3}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}11\\6\\-7\end{pmatrix}\right) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$

för alla $t \in \mathbb{R}$.

7. Sätt $\mathbf{u}_1 = (1,1,1,1)$ och $\mathbf{u}_2 = (1,0,1,0)$. Vi börjar med att bestämma en ON-bas, $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ i $\mathbb{U}$. Låt $\mathbf{f}_1 = \widehat{\mathbf{u}}_1$ och ortogonalisera $\mathbf{u}_2$.

$$\mathbf{u}_{2_{\|\mathbf{f}_1}} = (\mathbf{u}_2 \bullet \mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1 = \frac{1}{2^2}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_{2_{\perp\mathbf{f}_1}} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_{2_{\|\mathbf{f}_1}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\0\\2\\0\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} = \mathbf{f}_2$$

eftersom $\left|\mathbf{u}_{2_{\perp\mathbf{f}_1}}\right| = 1$. Vi kan då använda ON-basen till att beräkna

$$F(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} = (\mathbf{v} \bullet \mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1 + (\mathbf{v} \bullet \mathbf{f}_2)\,\mathbf{f}_2.$$

Enligt **Sats 7.3.1**, sid 174 består avbildningsmatrisens kolonner av koordinaterna för det som F gör med de aktuella basvektorerna, i detta fall standardbasen. Vi får

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{e}_1) &= \mathbf{e}_{1_{\|\mathbb{U}}} = (\mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1 + (\mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{f}_2)\,\mathbf{f}_2 = \\
&= \frac{1}{2^2}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2^2}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{4}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \\
F(\mathbf{e}_2) &= \mathbf{e}_{2_{\|\mathbb{U}}} = (\mathbf{e}_2 \bullet \mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1 + (\mathbf{e}_2 \bullet \mathbf{f}_2)\,\mathbf{f}_2 = \\
&= \frac{1}{2^2}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2^2}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{4}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

och studerar man kalkylen ovan så ser man att $F(\mathbf{e}_3) = F(\mathbf{e}_1)$ och $F(\mathbf{e}_4) = F(\mathbf{e}_2)$ så att F:s matris i standardbasen blir

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Slutligen, eftersom $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2 \in \mathbb{U}$ så är ju $F(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_{1_{\|\mathbb{U}}} = \mathbf{u}_1$ och $F(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_{2_{\|\mathbb{U}}} = \mathbf{u}_2$;

$$F(\mathbf{u}_1) = F\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$F(\mathbf{u}_2) = F\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Som $\mathbf{v}_3$ och $\mathbf{v}_4$ väljer vi två $(= \dim R^4 - \dim \mathbb{U} = \dim \mathbb{U}^\perp)$ vektorer ur $\mathbb{U}^\perp$, tex

$$\mathbf{v}_3 = (1, 0, -1, 0) \quad \text{och} \quad \mathbf{v}_4 = (0, 1, 0, -1).$$

Då de tillhör $\mathbb{U}^\perp$ följer det att båda måste avbildas på $\mathbf{0}$. Uträkning med hjälp av avbildningsmatrisen ger

$$F(1,0,-1,0) = F\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F(0,1,0,-1) = F\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eftersom $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ är en bas i $\mathbb{U}$ och $\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ är en bas i $\mathbb{U}^\perp$ har vi kontrollerat matrisen mot en bas i $\mathbb{R}^4$ och fått det förväntade resultatet. Därmed har vi verifierat att avbildningsmatrisen är den rätta.