Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Ulf Janfalk

Kurskod: TATA31
Provkod: TEN1

Tentamen i Linjär algebra (TATA31/TEN1) 2019–08–29, 14–19.

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.
För godkänt räcker 9 poäng och minst 3 uppgifter med 2 eller 3 poäng. Godkänd kontrollskrivning ($\geq$ 11p) ht2018 ger 3 poäng på uppgift 1 (som alltså inte behöver lösas) och 16p eller mer ger 4 poäng på uppgift 1. Markera detta genom att skriva ”G” respektive ”G+1” i rutan för uppgift 1.
Fullständiga motiveringar krävs. Lösningar läggs ut efter skrivtidens slut på

http://courses.mai.liu.se/GU/TATA31/tentor.html

Resultat meddelas via e-post inom 10 arbetsdagar.
Alla koordinater för vektorer och punkter är, om ej annat anges, givna med avseende på ett positivt orienterat ON-system, $\mathbb{R}^n$ är ett euklidiskt rum med standardskalärprodukten och standardbasen ett positivt orienterat ON-system.

(1 p) 1. (a) Beräkna arean av parallellogrammen med hörn i $(1,1), (2,3), (4,2)$ och $(5,4)$.

(1 p) (b) Beräkna determinanten
$$\begin{vmatrix} 1 & e & 2 & \pi \\ 3 & 2e & 0 & -\pi \\ 0 & -e & 0 & 0 \\ 1 & 3e & 0 & \pi \end{vmatrix}.$$

(1 p) (c) Låt A, B och C vara $n \times n$-matriser. Lös ut matrisen X ur matrisekvationen
$$XA = \left(BX^t + C\right)^t.$$
Matriserna A, B, C är sådana att eventuella inverser som kan behövas förutsätts existera.

(3 p) 2. Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är sådan att $F(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$:s ortogonalprojektion i planet Π: $x + 2y - 3z = 0$. Bestäm F:s matris i standardbasen. Verifiera att din matris är korrekt genom att beräkna $F(\mathbf{n})$ där $\mathbf{n}$ är normalen till Π samt $F(\mathbf{v}_1)$ och $F(\mathbf{v}_2)$ där $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är en bas i Π.

(3 p) 3. Betrakta underrummet
$$\mathbb{U} = [(1,0,1,0,1), (0,1,0,1,0), (1,2,3,2,1)] \subset \mathbb{R}^5.$$
Bestäm en ON-bas i $\mathbb{U}$. Låt $\mathbf{v} = (1,2,3,4,5)$. Beräkna avståndet mellan $\mathbf{v}$ och $\mathbb{U}$:s *ortogonala komplement*.

(3 p) 4. Låt $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ vara en linjär avbildning med avbildningsmatris
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$
i standardbaserna för $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^4$ och låt $F^*\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som har A^t som avbildningsmatris i standardbaserna för $\mathbb{R}^4$ och $\mathbb{R}^2$. Bestäm, om möjligt, en ON-bas av egenvektorer till $F^* \circ F$.

(3 p) 5. Om den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ vet man följande:

- $(1,0,1) \in N(F)$
- $F(1,1,0) = (1,-2), \quad F(0,1,1) = (5,-10).$

Bestäm F:s matris i standardbaserna för $\mathbb{R}^3$ och $\mathbb{R}^2$. Bestäm sedan dimensionerna för noll- och värderum.

(3 p) 6. Betrakta underrummen

$$\mathbb{U} = \left[2 + x - 3x^3,\ -4 + x^2 + 5x^3,\ 2x + x^2 - x^3\right] \subset \mathbb{P}_3,$$
$$\mathbb{V} = \left[-1 + x + x^2,\ 1 - x + x^3,\ -2 + x + x^2 + x^3\right] \subset \mathbb{P}_3.$$

Bestäm dimension av $\mathbb{U}$ respektive $\mathbb{V}$. Ange sedan en bas i $\mathbb{U} \cap \mathbb{V}$ (OBS! Som polynom!)

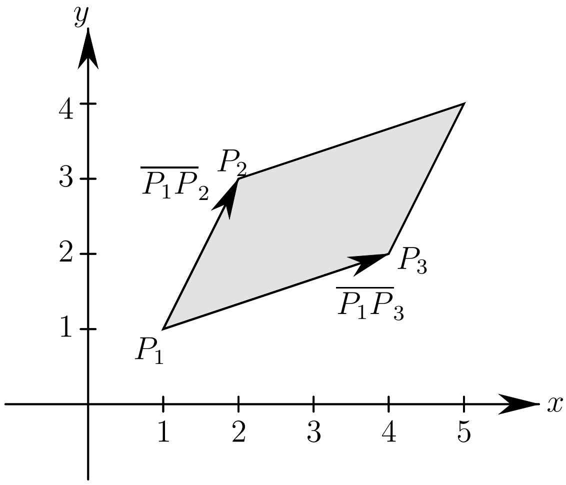
(3 p) 7. Ellipsoiden Ω och planet Π ges av

$$\Omega\colon \quad 3x_1^2 + 9x_2^2 + 6x_3^3 \le 1, \qquad \Pi\colon \quad x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0.$$

Beräkna arean av den ellips som utgör snittytan mellan Ω och Π.
Anmärkning: Att arean av en ellips är πab där a och b är ellipsens halvaxellängder får användas utan bevis.

Lösningsförslag till TATA31, Linjär algebra, 2019–08–29

1. (a) För att kunna använda vektorprodukten vid beräkning av arean utvidgar vi problemet till $\mathbb{R}^3$ genom att lägga till en z-axel som pekar rakt in i papperet. Punkternaa får då alla z-koordinat som är 0. Sätt $P_1 = (1,1,0)$, $P_2 = (2,3,0)$ och $P_3 = (4,2,0)$.



Då fås

$$\overline{P_1P_2} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \quad \overline{P_1P_3} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\overline{P_1P_2}\times\overline{P_1P_3} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\times\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\0\\-5\end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{matrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{matrix}$$

$$\Longrightarrow \text{Arean} = \left|\overline{P_1P_2}\times\overline{P_1P_3}\right| = 5$$

(b) Utnyttja utveckling efter rad/kolonn. Börjar med rad 3.

$$\begin{vmatrix}1 & e & 2 & \pi\\ 3 & 2e & 0 & -\pi\\ 0 & -e & 0 & 0\\ 1 & 3e & 0 & \pi\end{vmatrix} = -e(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 2 & \pi\\ 3 & 0 & -\pi\\ 1 & 0 & \pi\end{vmatrix} \overset{k_2}{=} e\cdot 2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & -\pi\\ 1 & \pi\end{vmatrix} = -2e4\pi =$$
$$= -8e\pi$$

(c) Räknelagarna för matriser (Sats 3.2.9, sid 61) och för transponering (Sats 3.2.13, sid 63) ger

$$XA = \left(BX^t + C\right)^t = \left(BX^t\right)^t + C^t = \left(X^t\right)^t B^t + C^t = XB^t + C^t \iff$$
$$\iff XA - XB^t = X\left(A - B^t\right) = C^t \iff X = C^t\left(A - B^t\right)^{-1}$$

2. Då Π: $x + 2y - 3z = 0$ läser vi av koefficienterna och sätter $\mathbf{n} = (1,2,-3)$. Då gäller

$$F(\mathbf{u}) = \mathbf{u}_{\parallel\Pi} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\parallel\mathbf{n}} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u}\bullet\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}.$$

Enligt Sats 7.3.1, sid 174 skall vi bestämma F:s verkan på basvektorerna. Vi får

$$F(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 - \frac{1}{14}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} = \frac{1}{14}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}14\\0\\0\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{14}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}13\\-2\\3\end{pmatrix},$$

$$F(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2 - \frac{1}{14}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} = \frac{1}{14}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\14\\0\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\4\\-6\end{pmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{14}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2\\10\\6\end{pmatrix},$$

$$F(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3 - \frac{1}{14}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} = \frac{1}{14}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\0\\14\end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\6\\-9\end{pmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{14}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\6\\5\end{pmatrix} \Longrightarrow A_{\underline{\mathbf{e}}} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}13 & -2 & 3\\-2 & 10 & 6\\3 & 6 & 5\end{pmatrix}.$$

Som bas för Π väljer vi två icke-parallella vektorer i Π, t ex $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 1)$. Har vi räknat rätt ovan så skall gälla att

$$F(\mathbf{n}) = \mathbf{0}, \quad F(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1, \quad F(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2$$

eftersom projektionsriktningen alltid projiceras på $\mathbf{0}$ och vektorer i projektionsplanet projiceras på sig själva. Vi får

$$F(\mathbf{n}) = \frac{1}{14}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}13 & -2 & 3\\-2 & 10 & 6\\3 & 6 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$F(\mathbf{v}_1) = \frac{1}{14}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}13 & -2 & 3\\-2 & 10 & 6\\3 & 6 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$F(\mathbf{v}_2) = \frac{1}{14}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}13 & -2 & 3\\-2 & 10 & 6\\3 & 6 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

så matrisen är korrekt.

3. Sätt

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0, 1, 0, 1) \quad \mathbf{u}_2 = (0, 1, 0, 1, 0), \quad \mathbf{u}_3 = (1, 2, 3, 2, 1).$$

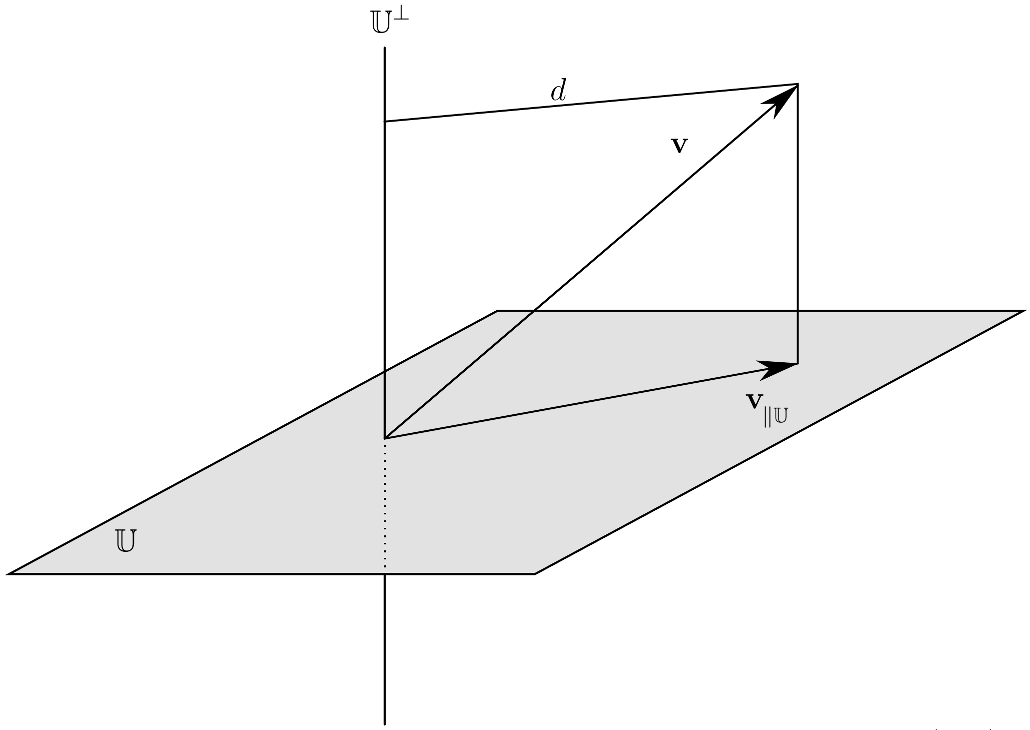
Vi börjar med att observera att $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2$ och att de tre vektorerna är linjärt oberoende (en linjärkombination av $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ måste ha samma 1:a, 3:e och 5:e koordinat och det har inte $\mathbf{u}_3$). För att ordna en ON-bas i $\mathbb{U}$ behöver vi därför endast normera $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ortogonalisera $\mathbf{u}_3$ och därefter normera. Vi får

$$\mathbf{f}_1 = \widehat{\mathbf{u}}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \widehat{\mathbf{u}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_{3_{\|[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}} &= (\mathbf{u}_3\bullet\mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1 + (\mathbf{u}_3\bullet\mathbf{f}_2)\,\mathbf{f}_2 = \\
&= \frac{1}{3}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\2\\1\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\2\\1\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \\
&= \frac{5}{3}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix} + 2\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}5\\0\\5\\0\\5\end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\6\\0\\6\\0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}5\\6\\5\\6\\5\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_{3_{\perp[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}} &= \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_{3_{\|[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\2\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}5\\6\\5\\6\\5\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\6\\9\\6\\3\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}5\\6\\5\\6\\5\end{pmatrix}\right) = \\
&= \frac{1}{3}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2\\0\\4\\0\\-2\end{pmatrix} = -\frac{2}{3}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Därmed är $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ en ON-bas i $\mathbb{U}$.
För att se vilket avstånd som skall beräknas, studera nedanstående principskiss där d markerar det sökta avståndet.



Ur figuren ser vi nu att det sökta avståndet fås genom att beräkna $\left|\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}\right| = d$.

$$\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} = (\mathbf{v}\bullet\mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1 + (\mathbf{v}\bullet\mathbf{f}_2)\,\mathbf{f}_2 + (\mathbf{v}\bullet\mathbf{f}_3)\,\mathbf{f}_3 =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{6}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{9}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{6}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + 0\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\3\\3\\3\\3\end{pmatrix} \Longrightarrow d = \left|\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\3\\3\\3\\3\end{pmatrix}\right| = 3\left|\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right| = 3\sqrt{5}$$

4. Sats 7.6.2, sid 186 ger att A^tA är avbildningsmatris till $F^*\circ F$. Då F tar indata i $\mathbb{R}^2$ och F^* ger utdata i $\mathbb{R}^2$ följer det att A^tA blir en 2×2-matris (vilket ju förstås blir resultatet om man räknar ut den vilket vi gör nedan). Oavsett format på A kommer A^tA alltid att vara en kvadratisk symmetrisk matris. Då standardbasen i $\mathbb{R}^2$ är en ON-bas följer det att $F^*\circ F$ är en symmetrisk avbildning. Därmed finns enligt

spektralsatsen Sats 8.3.5, sid 215 en ON-bas av egenvektorer. Vi får

$$A^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 4 \\ 4 & 15 \end{pmatrix},$$

$$\det(A^tA - \lambda I) = \begin{vmatrix} 15-\lambda & 4 \\ 4 & 15-\lambda \end{vmatrix} = (15-\lambda)^2 - 4^2 = 0 \iff \lambda = 15 \pm 4 = 19, 11,$$

$$\underline{\underline{\lambda = 19}}: \quad \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_{19} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\underline{\underline{\lambda = 11}}: \quad \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_{11} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

d v s $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$ är en ON-bas av egenvektorer.

5. Precis som i uppgift 3 skall vi bestämma matrisen genom att beräkna vad F gör med basvektorerna. Låt

$$\mathbf{e}_1^3, \mathbf{e}_2^3, \mathbf{e}_3^3 \quad \text{respektive} \quad \mathbf{e}_1^2, \mathbf{e}_2^2$$

vara standardbaserna i $\mathbb{R}^3$ respektive $\mathbb{R}^2$.
Att $(1,0,1) \in N(F)$ betyder att $F(1,0,1) = \mathbf{0}$. Detta tillsammans med övriga förutsättningar och linjäriteten ger

$$\begin{cases} F(1,0,1) = F\left(\mathbf{e}_1^3\right) + F\left(\mathbf{e}_3^3\right) = \mathbf{0} \\ F(1,1,0) = F\left(\mathbf{e}_1^3\right) + F\left(\mathbf{e}_2^3\right) = (1,-2) = \mathbf{e}_1^2 - 2\mathbf{e}_2^2 \\ F(0,1,1) = F\left(\mathbf{e}_2^3\right) + F\left(\mathbf{e}_3^3\right) = (5,-10) = 5\mathbf{e}_1^2 - 10\mathbf{e}_2^2 \end{cases}.$$

Detta är ett linjärt ekvationssystem där variablerna är $F(\mathbf{e}_1^3), F(\mathbf{e}_2^3), F(\mathbf{e}_3^3)$. På matrisform fås

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \mathbf{0} \\ 1 & 1 & 0 & \mathbf{e}_1^2-2\mathbf{e}_2^2 \\ 0 & 1 & 1 & 5\mathbf{e}_1^2-10\mathbf{e}_2^2 \end{array}\right) \overset{r_2-r_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & -1 & \mathbf{e}_1^2-2\mathbf{e}_2^2 \\ 0 & 1 & 1 & 5\mathbf{e}_1^2-10\mathbf{e}_2^2 \end{array}\right) \overset{\substack{r_3-r_2 \\ r_3/2}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & -1 & \mathbf{e}_1^2-2\mathbf{e}_2^2 \\ 0 & 0 & 1 & 2\mathbf{e}_1^2-4\mathbf{e}_2^2 \end{array}\right) \overset{\substack{r_1-r_3 \\ r_2+r_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2\mathbf{e}_1^2+4\mathbf{e}_2^2 \\ 0 & 1 & 0 & 3\mathbf{e}_1^2-6\mathbf{e}_2^2 \\ 0 & 0 & 1 & 2\mathbf{e}_1^2-4\mathbf{e}_2^2 \end{array}\right) \iff$$

$$\iff \begin{cases} F(\mathbf{e}_1^3) = -2\mathbf{e}_1^2 + 4\mathbf{e}_2^2 = \underline{\mathbf{e}}_2\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ F(\mathbf{e}_1^3) = 3\mathbf{e}_1^2 - 6\mathbf{e}_2^2 = \underline{\mathbf{e}}_2\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix} \\ F(\mathbf{e}_1^3) = 2\mathbf{e}_1^2 - 4\mathbf{e}_2^2 = \underline{\mathbf{e}}_2\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \end{cases} \iff A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 4 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Då $V(F)$ är höljet av avbildningsmatrisens kolonnvektorer är $\dim V(F) = 1$ eftersom alla tre är multipler av vektorn $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Då F tar sina indata från $\mathbb{R}^3$ ger dimensionssatsen (Sats 7.5.6, sid 182) att $\dim N(F) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim V(F) = 3 - 1 = 2$.

6. Börja med att skriva båda rummen som lösningsrum, d v s studera beroendeekvationen och L.K.=godtycklig vektor för att rensa löjliga element och få fram ekvationer för rummen. Låt $\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{pmatrix}$ vara standardbasen i $\mathbb{P}_3$ och sätt

$$\mathbf{p}_1 = 2+x-3x^3 = \underline{\mathbf{x}}\begin{pmatrix} 2\\ 1\\ 0\\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = -4+x^2+5x^3 = \underline{\mathbf{x}}\begin{pmatrix} -4\\ 0\\ 1\\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = 2x+x^2-x^3 = \underline{\mathbf{x}}\begin{pmatrix} 0\\ 2\\ 1\\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{q}_1 = -1+x+x^2 = \underline{\mathbf{x}}\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 1\\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = 1-x+x^3 = \underline{\mathbf{x}}\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = -2+x+x^2+x^3 = \underline{\mathbf{x}}\begin{pmatrix} -2\\ 1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi börjar med $\mathbb{U} = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3]$.

$$\lambda_1\mathbf{p}_1 + \lambda_2\mathbf{p}_2 + \lambda_3\mathbf{p}_3 = \mathbf{0}, \quad a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \iff$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & -4 & 0 & 0 & a_0\\ 1 & 0 & 2 & 0 & a_1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2\\ -3 & 5 & -1 & 0 & a_3 \end{array}\right) \overset{\substack{r_1-2r_2\\ r_4+3r_2\\ r_2\leftrightarrow r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 0 & a_1\\ 0 & -4 & -4 & 0 & a_0-2a_1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2\\ 0 & 5 & 5 & 0 & 3a_1+a_3 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2+4r_3\\ r_4-5r_3\\ r_2\leftrightarrow r_3}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 0 & a_1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_0-2a_1+4a_2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3a_1-5a_2+a_3 \end{array}\right).$$

Här ser vi att beroendeekvationen får en-parametrig lösning, d v s det finns ett löjligt element. Därur följer $\dim U = 2$. Från L.K.=godtycklig vektor följer det att systemet är lösbart omm uttrycken i högerleden i rad 3 och 4 båda är 0, d v s

$$\mathbb{U} = \left\{ a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{P}_3 \colon \begin{array}{l} a_0 - 2a_1 + 4a_2 \phantom{{}+a_3} = 0\\ \phantom{a_0 -{}} 3a_1 - 5a_2 + a_3 = 0 \end{array} \right\}.$$

Gör nu om samma operationer med $\mathbb{V} = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3]$. Vi får

$$\lambda_1\mathbf{q}_1 + \lambda_2\mathbf{q}_2 + \lambda_3\mathbf{q}_3 = \mathbf{0}, \quad a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \iff$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} -1 & 1 & -2 & 0 & a_0\\ 1 & -1 & 1 & 0 & a_1\\ 1 & 0 & 1 & 0 & a_2\\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_3 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2+r_1\\ r_3+r_1\\ -r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 2 & 0 & -a_0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & a_0+a_1\\ 0 & 1 & -1 & 0 & a_0+a_2\\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_3 \end{array}\right) \overset{\substack{r_4-r_3\\ r_2\leftrightarrow r_3}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 2 & 0 & -a_0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & a_0+a_2\\ 0 & 0 & -1 & 0 & a_0+a_1\\ 0 & 0 & 2 & 0 & -a_0-a_2+a_3 \end{array}\right) \overset{\substack{r_4+2r_3\\ -r_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 2 & 0 & -a_0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & a_0+a_2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -a_0-a_1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_0+2a_1-a_2+a_3 \end{array}\right).$$

På samma sätt som ovan ser vi att beroendeekvationen här är entydigt lösbar, d v s $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ är linjärt oberoende och därmed en bas för $\mathbb{V}$. Följaktligen är $\dim \mathbb{V} = 3$. Då systemet L.K.=godtycklig vektor är lösbart omm $a_0 + 2a_1 - a_2 + a_3 = 0$ är det detta som blir ekvationen för $\mathbb{V}$, d v s

$$\mathbb{V} \left\{ a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{P}_3 \colon a_0 + 2a_1 - a_2 + a_3 = 0 \right\}.$$

De polynom som tillhör $\mathbb{U}\cap\mathbb{V}$ är de som till hör *både* $\mathbb{U}$ och $\mathbb{V}$, d v s de som uppfyller bådas ekvationer. Vi får

$$\begin{cases} a_0 - 2a_1 + 4a_2 = 0 \\ 3a_1 - 5a_2 + a_3 = 0 \\ a_0 + 2a_1 - a_2 + a_3 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_3-r_1 \\ 3r_3}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & -15 & 3 & 0 \end{array}\right) \overset{r_3-4r_2}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{r_2+r_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_1 - 4a_2 = -4t \\ 0 \\ t \\ 5t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \mathbf{p} = t\,\underline{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = t(-4 + x^2 + 5x^3) \in \mathbb{U}\cap\mathbb{V} \quad t \in \mathbb{R},$$

d v s $\mathbf{q} = -4 + x^2 + 5x^3$ är en bas i $\mathbb{U}\cap\mathbb{V}$.

7. Byt till ON-bas där planets normal är första basvektor, d v s välj $\mathbf{f}_1 = \widehat{\mathbf{n}}$ och fyll sedan ut till höger ON-bas.

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{f}_3 = \frac{1}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$X_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = TX_{\underline{\mathbf{f}}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Byte till denna bas ger att ekvationen för Π blir

$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 3y_1 = 0 \iff y_1 = 0.$$

Motsvarande kalkyl för ellipsekvationen blir

$$Q(\mathbf{u}) = X_{\underline{\mathbf{e}}}{}^t\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}X_{\underline{\mathbf{e}}} = (TY_{\underline{\mathbf{f}}})^t\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}TY_{\underline{\mathbf{f}}} = Y_{\underline{\mathbf{f}}}{}^tT^t\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}TY_{\underline{\mathbf{f}}} =$$

$$= Y_{\underline{\mathbf{f}}}^{\;t} T^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \frac{3}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} Y_{\underline{\mathbf{f}}} =$$

$$= \frac{1}{3} Y_{\underline{\mathbf{f}}}^{\;t} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -6 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} Y_{\underline{\mathbf{f}}} = \frac{1}{3} Y_{\underline{\mathbf{f}}}^{\;t} \begin{pmatrix} 21 & -6 & 0 \\ -6 & 18 & 6 \\ 0 & 6 & 15 \end{pmatrix} Y_{\underline{\mathbf{f}}} =$$

$$= Y_{\underline{\mathbf{f}}}^{\;t} \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} Y_{\underline{\mathbf{f}}} = 7y_1^2 + 6y_2^2 + 5y_3^2 - 4y_1y_2 + 4y_2y_3.$$

På snittkurvan mellan ellipsoiden och planet gäller

$$\begin{array}{ll} \text{Ellipsoid:} & 7y_1^2 + 6y_2^2 + 5y_3^2 - 4y_1y_2 + 4y_2y_3 = 1 \\ \text{Planet:} & y_1 = 0 \end{array} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \text{Snittkurvan:} \quad 7 \cdot 0^2 + 6y_2^2 + 5y_3^2 - 4 \cdot 0 \cdot y_2 + 4y_2y_3 = 6y_2^2 + 5y_3^2 + 4y_2y_3 =$$

$$= \begin{pmatrix} y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = Q_2(y_2, y_3) = 1.$$

Detta är ekvation för en ellips. Beräkna nu egenvärdena för denna så får vi halvaxellängderna när vi skrivit den nya ekvationen på standardform.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(5-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 11\lambda + 26 = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \lambda = \frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{11^2 - 104}{4}} = \frac{11 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Byte till ON-bas av egenvektorer till dessa egenvärden ger den nya ekvationen

$$\frac{11+\sqrt{17}}{2} z_1^2 + \frac{11-\sqrt{17}}{2} z_2^2 = \left(\frac{z_1}{\sqrt{\frac{2}{11+\sqrt{17}}}} \right)^2 + \left(\frac{z_2}{\sqrt{\frac{2}{11-\sqrt{17}}}} \right)^2 = 1.$$

Ur detta avläser vi halvaxellängderna a och b,

$$a = \sqrt{\frac{2}{11-\sqrt{17}}}, \quad b = \sqrt{\frac{2}{11+\sqrt{17}}},$$

$$\text{Arean} = \pi ab = \pi \sqrt{\frac{2}{11-\sqrt{17}}} \sqrt{\frac{2}{11+\sqrt{17}}} = \pi \sqrt{\frac{4}{11^2 - 17}} = \pi \frac{2}{\sqrt{104}} = \frac{\pi}{\sqrt{26}}.$$