Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Ulf Janfalk

Kurskod: TATA31
Provkod: TEN1

Tentamen i Linjär algebra (TATA31/TEN1) 2019–01–16, 14–19.

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.
För godkänt räcker 9 poäng och minst 3 uppgifter med 2 eller 3 poäng. Godkänd kontrollskrivning ($\geq$ 11p) ht2018 ger 3 poäng på uppgift 1 (som alltså inte behöver lösas) och 16p eller mer ger 4 poäng på uppgift 1. Markera detta genom att skriva "G" respektive "G+1" i rutan för uppgift 1.
Fullständiga motiveringar krävs. Lösningar läggs ut efter skrivtidens slut på

http://courses.mai.liu.se/GU/TATA31/tentor.html

Resultat meddelas via e-post inom 10 arbetsdagar.
Alla koordinater för vektorer och punkter är, om ej annat anges, givna med avseende på ett positivt orienterat ON-system, $\mathbb{R}^n$ är ett euklidiskt rum med standardskalärprodukten och standardbasen ett positivt orienterat ON-system.

1. Låt Π vara planet som går genom punkterna $(2,0,-1),(1,1,2)$ och $(2,1,1)$. Vidare, låt

$$L_1\colon\ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix},\quad L_2\colon\ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}+s\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix},\quad s,t\in\mathbb{R}.$$

(1 p) (a) Bestäm ekvationen för Π på normalform.

(1 p) (b) Beräkna linjernas L_1 och L_2 skärningspunkter, P_1 och P_2, med planet Π.

(1 p) (c) Beräkna arean av triangeln med hörn i P_1, P_2 och origo.

(3 p) 2. För varje värde på $a\in\mathbb{R}$, avgör om ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax - y - z = a\\ 2x + ay + 4z = 5\\ x + y + 3z = 3\end{cases}$$

har entydig lösning, ingen lösning eller oändligt många lösningar. Om systemet för något värde på a saknar lösning, bestäm minsta-kvadratlösningen till detta olösbara system.

(3 p) 3. Ange en ON-bas i $\mathbb{U}=[(1,1,-1,2),(-2,1,2,2),(-1,3,1,6)]$ och fyll ut den till en ON-bas i $\mathbb{R}^4$. Ange koordinaterna för $\mathbf{v}=(1,2,-3,4)$ i den bas du valt.

(3 p) 4. Vilken sorts yta definieras av ekvationen

$$7x_1^2+6x_2^2+6x_3^2-4x_2x_3=1?$$

Ange en rotation av koordinatsystemet som överför ekvationen för ytan till standardform. Ange de punkter på ytan som ligger närmast origo och om sådana finnes, de som ligger längst ifrån.

VÄND!

(3 p) 5. För avbildningen $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gäller följande:

(i) F är symmetrisk,

(ii) $(7, 4, 4)$ är en egenvektor med egenvärde 1, $(4, -8, 1)$ är en egenvektor med egenvärde -1,

(iii) 3 är ett egenvärde.

Bestäm F:s matris i standardbasen.

(3 p) 6. Låt $\underline{\mathbf{x}}_3 = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{pmatrix}$ respektive $\underline{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix}$ vara standardbaserna i $\mathbb{P}_3$ respektive $\mathbb{P}_2$. Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_2$ ges av

$$F(1+x) = 2 + x^2, \qquad F(x) = 1 - x + x^2,$$
$$F(x^2) = 3 + x + x^2, \qquad F(x^3) = 1 - 3x + 2x^2.$$

Bestäm F:s matris i standardbaserna i $\mathbb{P}_3$ och $\mathbb{P}_2$. Bestäm sedan baser i F:s noll- och värderum samt deras dimension. Basvektorerna i respektive rum skall anges som ***polynom***, ej koordinatform!

(3 p) 7. Låt $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ vara en linjär avbildning som i standardbaserna för $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^4$ har matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestäm $\displaystyle \max_{\substack{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{u} \neq \mathbf{0}}} \frac{|F(\mathbf{u})|}{|\mathbf{u}|}.$

Lösningsförslag till TATA31, Linjär algebra, 2019–01–16

1. (a) Sätt $Q_1 = (2, 0, -1), Q_2 = (1, 1, 2)$ och $Q_3 = (2, 1, 1)$. Då fås

$$\overline{Q_1Q_2} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix},$$

$$\overline{Q_1Q_3} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \overline{Q_1Q_2} \times \overline{Q_1Q_3} = \underline{\mathbf{e}}\begin{array}{c}\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}\\ -1\\ 1\end{array}\ \underline{\mathbf{e}}\begin{array}{c}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\\ 0\\ 1\end{array} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix} \Longrightarrow \Pi\colon x - 2y + z = D$$

$$Q_1 = (2, 0, -1) \in \Pi \Longrightarrow 2 - 2\cdot 0 + (-1) = 1 = D \Longrightarrow \Pi\colon x - 2y + z = 1$$

(b) Insättning av linjernas parameterform i Π:s ekvation ger

$$L_1 \text{ i } \Pi\colon (1 + t) - 2(2 + 4t) + (3 + 5t) = -2t = 1 \iff t = -\frac{1}{2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \overline{OP}_1 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$L_2 \text{ i } \Pi\colon (2 + 2t) - 2(1 + 3t) + (-1 - 4t) = -1 - 8t = 1 \iff t = -\frac{1}{4} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \overline{OP}_2 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{4}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}6\\1\\0\end{pmatrix}.$$

(c) Beräkna kryssprodukten

$$\overline{OP}_1 \times \overline{OP}_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\ \underline{\mathbf{e}}\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\\ 1\\ 0\end{array} \times \underline{\mathbf{e}}\begin{array}{c}\begin{pmatrix}6\\1\\0\end{pmatrix}\\ 6\\ 1\end{array} = \frac{1}{8}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\6\\1\end{pmatrix}.$$

Arean av triangeln ges av

$$\frac{1}{2}\left|\overline{OP}_1 \times \overline{OP}_2\right| = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\left|\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\6\\1\end{pmatrix}\right| = \frac{\sqrt{38}}{16}.$$

2. Skriv ekvationssystemet på matrisform och låt $A =$ systemets koefficientmatris. Determinantkriteriet (Korollarium 4.7.2, sid 93) ger att systemet har entydig lösning om $\det A \neq 0$. Därför, beräkna $\det A$ och lös ekvationen $\det A = 0$.

$$\begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ 2 & a & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \overset{\substack{3k_1\\3k_2}}{=} \frac{1}{3^2}\begin{vmatrix} 3a & -3 & -1 \\ 6 & 3a & 4 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \overset{\substack{k_1-k_3\\k_2-k_3}}{=} \frac{1}{3^2}\begin{vmatrix} 3a+1 & -2 & -1 \\ 2 & 3a-4 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{3}{3^2}\begin{vmatrix} 3a+1 & -2 \\ 2 & 3a-4 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}((3a+1)(3a-4)+4) =$$
$$= \frac{1}{3}\left(9a^2 - 9a\right) = 3a(a-1) = 0 \iff a = 0, 1.$$

Följaktligen har systemet entydig lösning omm $a \neq 0$ och $a \neq 1$. Dessa värden på a måste nu kontrolleras separat.

$$\underline{\underline{a=0}}: \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2-2r_3 \\ r_3 \leftrightarrow r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2-2r_3 \\ r_3 \leftrightarrow r_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

vilket ger att lösning saknas då $a = 0$.

$$\underline{\underline{a=1}}: \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2/3, r_3/2 \\ r_3-r_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

och vi ser att systemet är lösbart då $a = 1$. Följaktligen har vi

(a) entydig lösning för $a \neq 0, 1$,

(b) oändligt många lösningar för $a = 1$ och

(c) ingen lösning då $a = 0$.

Återstår att bestämma minsta-kvadratlösningarna då $a = 0$, d v s lös $A^tAX = A^tY$.

$$A^tA = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 11 \\ 1 & 2 & 4 \\ 11 & 4 & 26 \end{pmatrix}$$
$$A^tY = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \\ 29 \end{pmatrix},$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 11 & 13 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 11 & 4 & 26 & 29 \end{array}\right) \overset{\substack{r_1-5r_2 \\ r_3-11r_2 \\ r_1 \leftrightarrow r_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -9 & -9 & -2 \\ 0 & -18 & -18 & -4 \end{array}\right) \overset{\substack{r_3-2r_2 \\ -r_2/9}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{r_1-2r_2}{\sim}$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 23/9 \\ 0 & 1 & 1 & 2/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t + 23/9 \\ t - 2/9 \\ -t \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 23 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

3. Låt $\mathbf{u}_1 = (1, 1, -1, 2), \mathbf{u}_2 = (-2, 1, 2, 2), \mathbf{u}_3 = (-1, 3, 1, 6)$. Vi börjar med att undersöka om det finns löjliga element samt att, eftersom vi skall fylla ut basen, skriva $\mathbb{U}$ som lösningsrum, d v s

$$\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \lambda_3\mathbf{u}_3 = \mathbf{0}, \mathbf{x} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & -2 & -1 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & x_2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & x_3 \\ 2 & 2 & 6 & 0 & x_4 \end{array}\right) \underset{\substack{r_2-r_1\\ r_3+r_1\\ r_4-2r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|rc} 1 & -2 & -1 & 0 & x_1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & -x_1+x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1+x_3 \\ 0 & 6 & 8 & 0 & -2x_1+x_4 \end{array}\right) \underset{r_4-2r_2}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rc} 1 & -2 & -1 & 0 & x_1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & -x_1+x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1+x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2x_2+x_4 \end{array}\right).$$

Vi börjar med beroendeekvationen.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5t \\ 4t \\ -3t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

som insatt i beroendeekvationen ger

$$5\mathbf{u}_1 + 4\mathbf{u}_2 - 3\mathbf{u}_3 = \mathbf{0} \iff \mathbf{u}_3 = \frac{1}{3}(5\mathbf{u}_1 + 4\mathbf{u}_2)$$

så $\mathbf{u}_3$ utses till löjligt element. Satsen om löjliga element (Sats 5.3.16, sid 111) ger då ihop med “L.K.=godtycklig vektor” att

$$\mathbb{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3] = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \colon \begin{array}{rcrcrl} x_1 & & + & x_3 & & = 0 \\ & -2x_2 & & + & x_4 & = 0 \end{array} \right\}.$$

För att ordna en ON-bas sätter vi $\mathbf{f}_1 = \widehat{\mathbf{u}}_1$ och ortogonaliserar $\mathbf{u}_2$. Vi får

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{7}} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_{1_{\parallel \mathbf{f}_1}} = (\mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{f}_1)\, \mathbf{f}_1 \frac{1}{\sqrt{7}^2} \left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \bullet \left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_{1_{\perp \mathbf{f}_1}} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_{1_{\parallel \mathbf{f}_1}} = \frac{1}{7} \left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -14 \\ 7 \\ 14 \\ 14 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{7} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -15 \\ 6 \\ 15 \\ 12 \end{pmatrix} = \frac{3}{7} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_2 = \widehat{\mathbf{u}_{1_{\perp \mathbf{f}_1}}} = \frac{1}{\sqrt{70}} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

så $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ är en ON-bas i $\mathbb{U}$.
Om vi tolkar ekvationerna som skalärprodukter så får vi att

$$\mathbb{U}^{\perp} = [(1,0,1,0), (0,-2,0,1)].$$

Då de två genererande vektorerna är ortogonala räcker det att normera dem för att få en ON-bas i $\mathbb{U}^{\perp}$, d v s

$$\mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_4 = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

är en ON-bas i $\mathbb{U}^{\perp}$. Därmed är $\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4$ en ON-mängd med "rätt antal" element och därför en ON-bas i $\mathbb{R}^4$.
För att beräkna koordinaterna för $\mathbf{v} = (1, 2, -3, 4)$ i $\underline{\mathbf{f}}$ kan man förstås utnyttja koordinatsambandet på vanligt sätt. Här skall vi istället utnyttja att "koordinater i ON-bas är skalärprodukter" (Korollarium 6.3.12, sid 148). Då fås

$$y_1 = \mathbf{v}\bullet\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\\4\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\2\end{pmatrix} = \frac{14}{\sqrt{7}} = 2\sqrt{7},$$

$$y_2 = \mathbf{v}\bullet\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{70}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\\4\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-5\\2\\5\\4\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{7}}\cdot 0 = 0,$$

$$y_3 = \mathbf{v}\bullet\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\\4\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2},$$

$$y_4 = \mathbf{v}\bullet\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\\4\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\-2\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot 0 = 0 \Longrightarrow$$

$$\mathbf{v} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\\4\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix}2\sqrt{7}\\0\\-\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}.$$

4. Kalla den kvadratiska formen Q, skriv på matrisform och beräkna egenvärdena till Q:s matris.

$$Q(\mathbf{u}) = Q\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right) = 7x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 - 4x_2x_3 = X_{\underline{\mathbf{e}}}{}^t\underbrace{\begin{pmatrix}7&0&0\\0&6&-2\\0&-2&6\end{pmatrix}}_{A}X = 1,$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix}7-\lambda&0&0\\0&6-\lambda&-2\\0&-2&6-\lambda\end{vmatrix} = (7-\lambda)\begin{vmatrix}6-\lambda&-2\\-2&6-\lambda\end{vmatrix} =$$

$$= (7-\lambda)((6-\lambda)^2 - 4) = 0 \iff \lambda = 7, 6 \pm 2 = 4, 7, 8,$$

Då egenvärdena är positiva är ytan en ellipsoid.
För att garantera att det nya koordinatsystemet är en rotation måste den nya ON-basen vara positivt orienterad. Beräkna egenvektorerna.

$$\underline{\underline{\lambda = 4}}: \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_4 = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{\lambda = 7}}: \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_7 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\underline{\underline{\lambda = 8}}: \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_8 = t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \qquad (1)$$

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

och för att vara säkra på att basbytet blir en rotation låter vi

$$\mathbf{f}_3 = \mathbf{f_1}\times\mathbf{f_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 0 \\ 1 \end{array} \times \underline{\mathbf{e}}\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 1 \\ 0 \end{array} = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (t = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ i (1) ovan}).$$

Då vi valt en ON-bas av egenvektorer där $\mathbf{f}_1$ är egenvektor till 4, $\mathbf{f}_2$ är egenvektor till 7 och $\mathbf{f}_3$ är egenvektor till 8 så följer det att

$$Q(\mathbf{u}) = Q\left(\underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = 4y_1^2 + 7y_2^2 + 8y_3^2 = \left(\frac{y_1}{1/2}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{1/\sqrt{7}}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{1/\sqrt{8}}\right)^2 = 1.$$

Då $\frac{1}{\sqrt{8}} < \frac{1}{\sqrt{7}} < \frac{1}{2}$ ser vi att närmast origo, på avstånd $\frac{1}{\sqrt{8}}$ ligger punkterna P_{min} som har koordinater $y_1 = y_2 = 0$, $y_3 = \pm\frac{1}{\sqrt{8}}$ och längst ifrån, på avstånd $\frac{1}{2}$ har vi punkterna P_{max} som har koordinater $y_1 = \pm\frac{1}{2}$, $y_2 = y_3 = 0$.

$$\overline{OP}_{max} = \pm\frac{1}{2}\mathbf{f}_1 = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ P_{max} = \pm\left(0, \frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{1}{\sqrt{8}}\right)$$

$$\overline{OP}_{min} = \pm\frac{1}{\sqrt{8}}\mathbf{f}_3 = \pm\frac{1}{\sqrt{8}\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{4}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ P_{min} = \pm\left(0, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

5. Sätt $\mathbf{v}_1 = (7,4,4)$ och $\mathbf{v}_2 = (4,-8,1)$. Eftersom F är symmetrisk så finns det en ON-bas av egenvektorer till F. Följaktligen måste egenvektorn $\mathbf{v}_3$ till 3 vara ortogonal mot de två givna, d v s parallell med kryssprodukten av dessa.

$$\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}7\\4\\4\end{pmatrix}\times\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\-8\\1\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}36\\9\\-72\end{pmatrix} = 9\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\1\\-8\end{pmatrix} = 9\mathbf{v}_3.$$

$$\begin{matrix}7 & \quad & 4\\ 4 & \quad & -8\end{matrix}$$

Sätt

$$\mathbf{f}_1 = \widehat{\mathbf{v}}_1 = \frac{1}{9}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}7\\4\\4\end{pmatrix},\quad \mathbf{f}_2 = \widehat{\mathbf{v}}_2 = \frac{1}{9}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\-8\\1\end{pmatrix},\quad \mathbf{f}_3 = \widehat{\mathbf{v}}_3 = \frac{1}{9}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\1\\-8\end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}T = \frac{1}{9}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}7&4&4\\4&-8&1\\4&1&-8\end{pmatrix},\quad A_{\underline{\mathbf{f}}} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&3\end{pmatrix},\quad A_{\underline{\mathbf{e}}} = TA_{\underline{\mathbf{f}}}T^{-1} =$$

$$= [T^{-1} = T^t = T] = \frac{1}{9}T\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&4&4\\4&-8&1\\4&1&-8\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9^2}\begin{pmatrix}7&4&4\\4&-8&1\\4&1&-8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&4&4\\-4&8&-1\\12&3&-24\end{pmatrix} = \frac{1}{9^2}\begin{pmatrix}81&72&-72\\72&-45&0\\-72&0&207\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix}9&8&-8\\8&-5&0\\-8&0&23\end{pmatrix}.$$

6. För att bestämma avbildningsmatrisen behöver vi uttrycka vad F gör med standardbasvektorerna i $\mathbb{P}_3$ med hjälp av standardbasen i $\mathbb{P}_2$. Alla utom $F(1)$ finns givna i uppgiften. Utnyttjar vi att F är linjär fås

$$F(1+x) = F(1)+F(x) = F(1)+1-x+x^2 = 2+x^2 \iff$$

$$\iff F(1) = 2+x^2-\left(1-x+x^2\right) = 1+x = \underline{\mathbf{x}}_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$F(x) = 1-x+x^2 = \underline{\mathbf{x}}_2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad F(x^2) = 3+x+x^2 = \underline{\mathbf{x}}_2\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$F(x^3) = 1-3x+2x^2 = \underline{\mathbf{x}}_2\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} \Longrightarrow A = \begin{pmatrix}1&1&3&1\\1&-1&1&-3\\0&1&1&2\end{pmatrix}\quad \text{så att}$$

$$F(\mathbf{p}) = F(a_0+a_1x+a_x^2+a_3x^3) = F\left(\underline{\mathbf{x}}_3\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\right) = \underline{\mathbf{x}}_2\begin{pmatrix}1&1&3&1\\1&-1&1&-3\\0&1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}.$$

Vi fortsätter med att beräkna $N(F) = \{\mathbf{p} = a_0 + a_1 x + a_x^2 + a_3 x^3 \in \mathbb{P}_3\colon F(\mathbf{p}) = \mathbf{0}\}$ genom att lösa ekvationen $AX = \mathit{0}$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{r_2 - r_1}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2+2r_3 \\ r_3 \leftrightarrow r_2}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s + 2t - 3s - t = -2s + t \\ -s - 2t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}. \qquad (2)$$

Ur detta följer att $-2-x+x^2, 1-2x+x^3$ är en bas i $N(F)$ och därmed $\dim N(F) = 2$. För att bestämma en bas i $V(F)$ utnyttjar vi Sats 7.5.4, sid 181 som säger att $V(F) =$ höljet av A:s kolonnvektorer. Ställer vi upp beroendeekvationen för dessa blir det den ekvation vi just löst! Låt $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_4$ vara de polynom som har A:s kolonner som sina koordinater. Om vi i (2) först låter $s = 1, t = 0$ och sedan $s = 0, t = 1$ fås

$$\begin{aligned} -2\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 = \mathbf{0} &\iff \mathbf{p}_3 = 2\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_1 - 2\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_4 = \mathbf{0} &\iff \mathbf{p}_4 = -\mathbf{p}_1 + 2\mathbf{p}_2, \end{aligned}$$

d v s $\mathbf{p}_3$ och $\mathbf{p}_4$ kan utses till löjliga element. Satsen om löjliga element (Sats 5.3.16, sid 111) ger

$$V(F) = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4] = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2] = \left[\underline{\mathbf{x}}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 + x,\ \underline{\mathbf{x}}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 - x + x^2 \right],$$

d v s $1 + x, 1 - x + x^2$ är en bas i $V(F)$ och även $\dim V(F) = 2$.

7. Låt $\mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}}_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ och skriv $|F(\mathbf{u})|^2$ som en matrisprodukt. Då fås

$$\begin{aligned} |F(\mathbf{u})|^2 &= F(\mathbf{u}) \bullet F(\mathbf{u}) = F\left(\underline{\mathbf{e}}_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) \bullet F\left(\underline{\mathbf{e}}_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \underline{\mathbf{e}}_4 A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}_4 A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \\ &= \left(A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)^t A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} A^t A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

vilket är en kvadratisk form med matris $B = A^t A$. Vi får

$$B = A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |F(\mathbf{u})|^2 = Q(\mathbf{u}) = 7x_1^2 + 6x_1x_2 + 6x_2^2,$$

$$\det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 3 \\ 3 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)(6-\lambda) - 9 = \lambda^2 - 13\lambda + 33 = 0 \iff$$

$$\iff \lambda = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{169 - 132}{4}} = \frac{13 \pm \sqrt{37}}{2}.$$

Sats 9.1.11, sid 227 ger då

$$\frac{13-\sqrt{37}}{2}\,|\mathbf{u}|^2 \leq |F(\mathbf{u})|^2 = Q(\mathbf{u}) \leq \frac{13+\sqrt{37}}{2}\,|\mathbf{u}|^2$$

med likhet i respektive olikhet då $\mathbf{u}$ är en egenvektor till respektive egenvärde. Delar vi med $|\mathbf{u}|^2$ och drar roten ur den högra olikheten fås

$$\sqrt{\frac{|F(\mathbf{u})|^2}{|\mathbf{u}|^2}} = \frac{|F(\mathbf{u})|}{|\mathbf{u}|} \leq \sqrt{\frac{13+\sqrt{37}}{2}}$$

med likhet då $\mathbf{u}$ är en egenvektor till egenvärdet $\dfrac{13+\sqrt{37}}{2}$. Följaktligen gäller att

$$\max_{\substack{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^2\\ \mathbf{u}\neq\mathbf{0}}} \frac{|F(\mathbf{u})|}{|\mathbf{u}|} = \sqrt{\frac{13+\sqrt{37}}{2}}.$$

Alternativ: Man kan förstås räkna ut $F(\mathbf{u})$ och sedan dess belopp på vanligt sätt;

$$F\left(\underline{\mathbf{e}}_2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \underline{\mathbf{e}}_4 A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}_4\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}_4\begin{pmatrix} x_1+2x_2 \\ 2x_1+x_2 \\ -x_1 \\ x_1-x_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left|F\left(\underline{\mathbf{e}}_2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)\right|^2 = (x_1+2x_2)^2+(2x_1+x_2)^2+(-x_1)^2+(x_1-x_2)^2 = \ldots =$$
$$= 7x_1^2+6x_1x_2+6x_2^2.$$

Resonemanget därefter blir detsamma.