LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Ulf Janfalk

Utbildningskod: TATA31
Provkod: KTR1

Kontrollskrivning i Linjär algebra 2019–10–22, 14–18.

Inga hjälpmedel, förutom passare, linjal eller gradskiva. OBS! Inga formler eller liknande tryckta på linjal eller gradskiva. Ej räknedosa.
På uppgift 1–14 skall ***endast svar*** ges. Varje rätt svar ger 1 poäng, fel svar 0 poäng.
Flera svar får och bör ges på samma blad, helst i nummerordning.
Uppgift 15 och 16 ger tre poäng vardera; ***fullständiga och välmotiverade lösningar krävs.***
Minst 11 poäng tillgodoräknas som tre poäng på uppgift 1 på tentamen.
Minst 16 poäng ger ytterligare en bonuspoäng på tentamen.
Rätten att tillgodoräkna sig bonus består under läsåret 2019-2020.
Resultatet meddelas via e-post. Lösningar läggs ut efter skrivtidens slut på

http://courses.mai.liu.se/GU/TATA31/tentor.html

Om inget annat sägs, är alla koordinater för vektorer i planet och rummet givna relativt en högerorienterad ON-bas.

1. Ange, i parameterform, lösningsmängden (kalla variablerna x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) till ekvationssystemet som i matrisform har totalmatrisen

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

2. Betrakta matriserna

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beräkna det/de av uttrycken nedan som är definierade:

$$AA, \quad AB + A, \quad BA, \quad BA^t.$$

3. Tag ett nytt pappersark och rita på detta ett vanligt rätvinkligt koordinatsystem (höger ON). Låt **fem rutor** svara mot **en längdenhet**. Låt $\underline{\mathbf{e}}$ vara en ON-bas där $\mathbf{e}_1$ pekar i den horisontella koordinataxelns riktning och $\mathbf{e}_2$ i den lodräta axelns riktning. Rita i detta koordinatsystem in, så exakt som möjligt, vektorerna $\mathbf{u} = -2\mathbf{e}_1 - 5\mathbf{e}_2$, $\mathbf{v} = 4\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, den ortogonala projektionen av $\mathbf{u}$ på $\mathbf{v}$ och den ortogonala projektionen av $\mathbf{v}$ på $\mathbf{u}$.

4. Låt $\mathbf{f}_1 = e^x + \sin x$, $\mathbf{f}_2 = e^x - \sin x$ och $\mathbf{g} = 2e^x + 3\sin x$.
Skriv $\mathbf{g}$ som en linjärkombination av $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$.

5. Bestäm, på parameterform, skärningslinjen mellan planen

$$x + 2y - z = 1 \quad \text{och} \quad 2x - y + 3z = -3.$$

6. Betrakta vektorerna

$$\mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{v} = \frac{1}{9} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 8 & 4 & 1 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

   Beräkna vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

7. Vilken punkt på linjen L: $x + 2y = 3$ ligger närmast punkten $P = (2, 1)$?

8. Beräkna avståndet från punkten $P = (1, 2, 3)$ till planet Π: $2x - 3y + z = 1$.

9. För vilka värden på a ***saknar*** matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   invers?

10. Låt $\mathbf{u} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$ och $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$. Ange en ***enhetsvektor*** som är ortogonal mot både $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$

11. Bestäm ekvationen på normalform till det plan som innehåller linjen

$$L\colon\ \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{och punkten} \quad P = (1, 0, 1).$$

12. Är någon av vektorerna nedan parallell med någon av de andra? I så fall, vilka?

$$\mathbf{u}_1 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_4 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

13. Ange inversen till $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

14. Låt I = enhetsmatrisen och

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Lös matrisekvationen

$$\left(X^t - B^t\right)^t A^{-1} = C - I.$$

15. För vilka värden på $a, b \in \mathbb{R}$ har ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -b \\ 2x_1 + ax_2 + ax_3 = b \\ ax_1 - x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

entydig lösning, ingen lösning eller oändligt många lösningar. Om systemet i något fall har oändligt många lösningar skall dessa anges.

16. Betrakta underrummet

$$\mathbb{U} = \left[\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \subset \mathbb{R}^5.$$

Beskriv $\mathbb{U}$ med så få genererande vektorer som möjligt. Avgör sedan vilka av vektorerna

$$\mathbf{v}_1 = (1,1,1,1,1), \quad \mathbf{v}_2 = (1,0,2,2,1), \quad \mathbf{v}_3 = (1,2,2,2,1), \quad \mathbf{v}_4 = (1,2,3,2,1)$$

som tillhör $\mathbb{U}$.

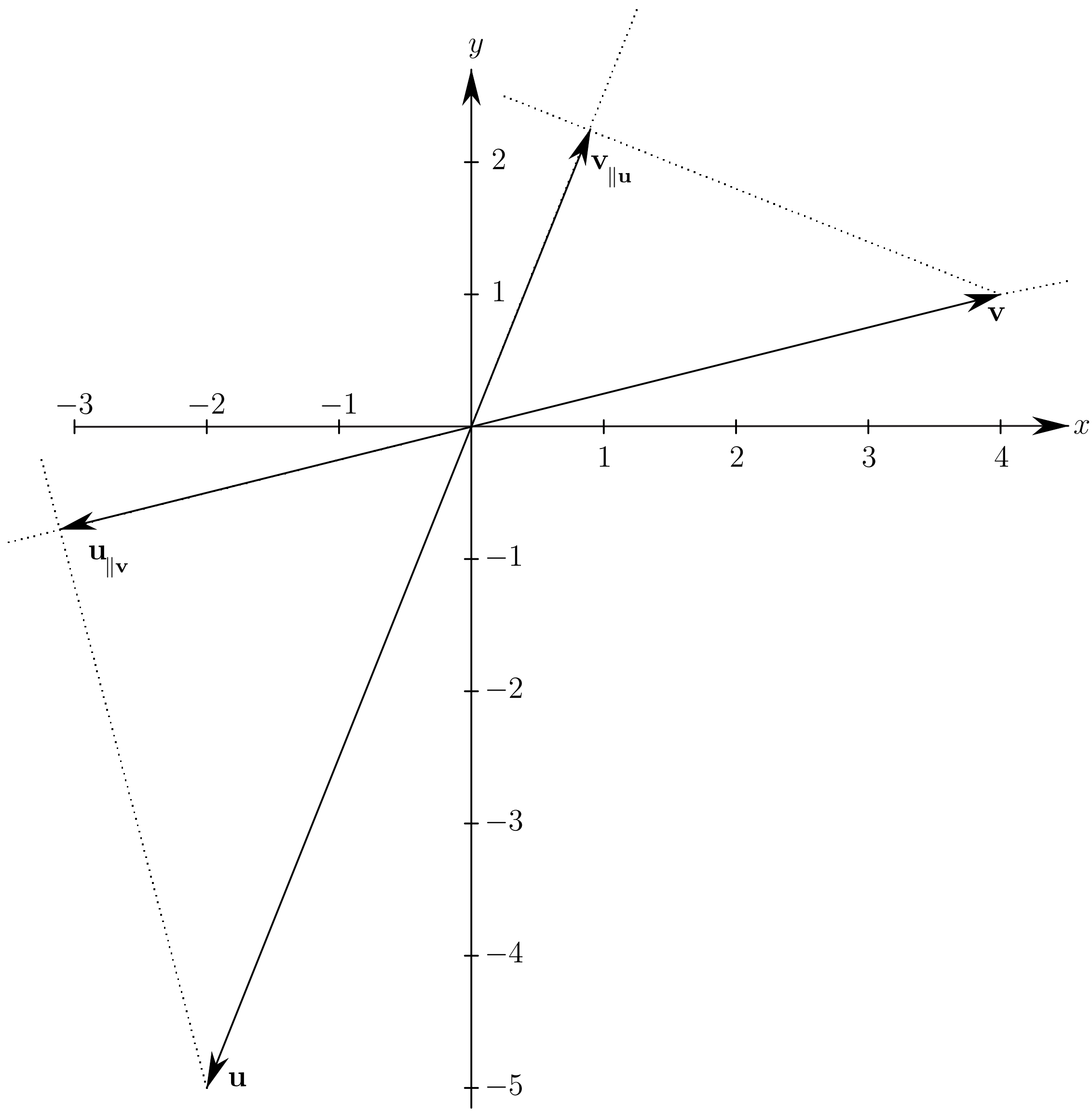
Lösningsförslag till TATA31. Linjär algebra, 2019–10–22

1. T.ex. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$

2. AA och BA är inte definierade

$$AB + A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad BA^t = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

3.



4. $\mathbf{g} = 2e^x + 3\sin x = \dfrac{5}{2}\mathbf{f}_1 - \dfrac{1}{2}\mathbf{f}_2$

5. L: $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$

6. $\dfrac{\pi}{2}$

7. $\left(\dfrac{9}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$

8. $\dfrac{\sqrt{14}}{7}$

9. $a = 1$ och 2

10. $\widehat{\mathbf{u} \times \mathbf{v}} = \dfrac{1}{\sqrt{35}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

11. $x - z = 0$

12. $\mathbf{u}_2$ och $\mathbf{u}_4$ är parallella.

13. $A^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

14. $X = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

15. Vi börjar med att skriva ekvationssystemet på matrisform.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -b \\ 2x_1 + ax_2 + ax_3 = b \\ ax_1 - x_2 + x_3 = 5 \end{cases} \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -b \\ 2 & a & a & b \\ a & -1 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

Beräkna först determinanten av koefficientmatrisen och sedan dess nollställen.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & a & a \\ a & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{k_2-4k_1 \\ k_3-2k_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & a-8 & a-4 \\ a & -1-4a & 1-2a \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{utveckla} \\ \text{efter rad 1} \end{bmatrix} =$$

$$= (a-8)(1-2a) - (-1-4a)(a-4) = 2a^2 + 2a - 12 = 0 \iff$$

$$\iff a^2 + a - 6 = 0 \iff a = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} = \frac{-1 \pm 5}{2} = 2, -3.$$

Determinantkriteriet (Sats 4.7.2, sid 93) ger då att systemet har

$$\text{entydig lösning för alla } b \in \mathbb{R} \text{ om } a \neq 2 \text{ och } a \neq -3$$

och ingen eller oändligt många lösningar om $a = 2$ eller -3. Dessa två värden måste därför kontrolleras separat.

$\underline{\underline{a = 2}}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -b \\ 2 & 2 & 2 & b \\ 2 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-2r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -b \\ 0 & -6 & -2 & 3b \\ 0 & -9 & -3 & 2b+5 \end{array}\right) \overset{\substack{-r_2 \\ -2r_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -b \\ 0 & 6 & 2 & -3b \\ 0 & 18 & 6 & -10-4b \end{array}\right) \overset{r_3-3r_2}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -b \\ 0 & 6 & 2 & -3b \\ 0 & 0 & 0 & 5b-10 \end{array}\right).$$

Ur ovanstående ser vi nu att systemet saknar lösning då $a = 2,\ b \neq 2$ och att systemet har oändligt många lösningar då $a = b = 2$. I fallet $a = b = 2$ får vi

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 6 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{r_2/2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{r_1-2r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 2x_2 = 4 + 2t \\ t \\ -3 - 3x_2 = -3 - 3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$\underline{\underline{a = -3}}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -b \\ 2 & -3 & -3 & b \\ -3 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3+3r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -b \\ 0 & -11 & -7 & 3b \\ 0 & 11 & 7 & 5-3b \end{array}\right) \overset{\substack{r_3+r_2 \\ -r_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -b \\ 0 & 11 & 7 & -3b \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right).$$

Ur ovanstående följer det nu att om $a = -3$ så saknar systemet lösning oavsett värdet på b.

Vi sammanfattar:

(a) Systemet har entydig lösning om $a \neq 2$ och $a \neq -3$.

(b) Systemet saknar lösning då $a = 2$, $b \neq 2$ samt då $a = -3$ (oavsett värde på b).

(c) Systemet har oändligt många lösningar

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

då $a = b = 2$.

16. Kalla de genererande vektorerna $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$. För att banta ner $\mathbb{U}$ studerar vi beroendeekvationen för $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$. Vi studerar också "L.K. av $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ = godtycklig vektor" för att hitta villkor på koordinaterna för att enkelt kunna avgöra vilka av $\mathbf{v}$:na som tillhör $\mathbb{U}$. Då fås

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3 + \lambda_4 \mathbf{u}_4 = \mathbf{0}, \mathbf{x} \iff$$

$$\iff \lambda_1 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

$$\iff \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}.$$

Vi behandlar båda systemen samtidigt

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} -1 & 1 & 2 & -1 & 0 & x_1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x_4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & x_5 \end{array}\right) \overset{r_5+r_1}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cc} -1 & 1 & 2 & -1 & 0 & x_1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x_4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & x_1+x_5 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2-2r_3 \\ r_5-r_3 \\ r_2 \leftrightarrow r_3}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cc} -1 & 1 & 2 & -1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2x_3+x_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_3+x_1+x_5 \end{array}\right) \overset{\substack{r_4+r_3 \\ -r_1 \\ -r_3}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2x_3-x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_2-2x_3+x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1-x_3+x_5 \end{array}\right). \qquad (1)$$

Vi börjar med att skriva ut ekvationerna i det som återstår av beroendeekvationen.

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \qquad \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \qquad\qquad \lambda_3 = 0 \\ \qquad\qquad 0 = 0 \\ \qquad\qquad 0 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 + 2\lambda_3 - \lambda_4 = -2s \\ -\lambda_3 - \lambda_4 = -s \\ 0 \\ s \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Insättning i beroendeekvationen av lösningen för $s = 1$ ger då

$$-2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + 0\mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4 = \mathbf{0} \iff \mathbf{u}_4 = 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2,$$

d v s $\mathbf{u}_4$ kan utses till löjligt element. Sats 5.3.16, sid 111 (Satsen om löjliga element) ger då att

$$\mathbb{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4] = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3].$$

Vidare, ur (1) ovan följer att systemet från "L.K. av $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ = godtycklig vektor" är lösbart endast om uttrycken i rad 3 och 4 är 0, d v s

$$x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \quad \textbf{och} \quad x_1 - x_3 + x_5 = 0.$$

Detta innebär att: för att $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ skall kunna skrivas som en linjärkombination av $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ så måste ovanstående uttryck vara 0, d v s

$$\mathbb{U} = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \colon \begin{array}{rcccccl} & x_2 & - & 2x_3 & + x_4 & & = 0, \\ x_1 & & - & x_3 & & + \; x_5 & = \; 0 \end{array} \right\}.$$

För att avgöra vilka av $\mathbf{v}$:na som tillhör $\mathbb{U}$ sätter vi in deras koordinater i ekvationerna för $\mathbb{U}$. **Båda** ekvationerna måste vara uppfyllda för att den kontrollerade vektorn skall tillhöra $\mathbb{U}$. Vi får

$\mathbf{v}_i$	$x_2 - 2x_3 + x_4$	$x_1 - x_3 + x_5$	
$\mathbf{v}_1 = (1,1,1,1,1)$	0	1	$\notin \mathbb{U}$
$\mathbf{v}_2 = (1,0,2,2,1)$	-2	0	$\notin \mathbb{U}$
$\mathbf{v}_3 = (1,2,2,2,1)$	0	0	$\in \mathbb{U}$
$\mathbf{v}_4 = (1,2,3,2,1)$	-2	-1	$\notin \mathbb{U}$

,

d v s endast $\mathbf{v}_3 \in \mathbb{U}$.