Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Ulf Janfalk

Utbildningskod: TATA31
Modul: TEN1

Tentamen i Linjär algebra (TATA31/TEN1) 2020–08–27, 14–19.

Inga hjälpmedel, förutom passare, linjal eller gradskiva. OBS! Inga formler eller liknande tryckta på linjal eller gradskiva. Ej räknedosa.
För godkänt räcker 9 poäng och minst 3 uppgifter med 2 eller 3 poäng. Godkänd kontrollskrivning ($\geq$ 11p) ht2019 ger 3 poäng på uppgift 1 (som alltså inte behöver lösas) och 16p eller mer ger 4 poäng på uppgift 1. Markera detta genom att skriva ”G” respektive ”G+1” i rutan för uppgift 1.
Fullständiga motiveringar krävs. Lösningar läggs ut efter skrivtidens slut på

http://courses.mai.liu.se/GU/TATA31/tentor.html

Resultat meddelas via e-post inom 10 arbetsdagar.
Alla koordinater för vektorer och punkter är, om ej annat anges, givna med avseende på ett positivt orienterat ON-system, $\mathbb{R}^n$ är ett euklidiskt rum med standardskalärprodukten och standardbasen ett positivt orienterat ON-system.

1. En parallellepiped har ett hörn i origo och kantvektorerna

$$\mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

Beräkna arean av den sidoyta som har **u** och **v** som kantvektorer samt normalen till det plan som spänns upp av **u** och **v** och går genom origo. Bestäm också epipedens höjd mot ovannämnda plan.
För full poäng krävs en tydlig figur!

2. Låt $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som i standardbasen i $\mathbb{R}^2$ har matrisen

$$A = \begin{pmatrix}7 & 6\\ b & -2\end{pmatrix}.$$

Avgör för vilka värden på $b \in \mathbb{R}$ som F är

(a) diagonaliserbar, (b) ortogonalt diagonaliserbar, (c) inte diagonaliserbar.

3. Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_3$ definieras av att

$$F(2-x)=3x-3x^2+x^3, \quad F(x+x^2)=5+4x+x^2+3x^3, \quad F(x)=2+x+x^2+x^3.$$

Bestäm F:s matris i standardbaserna för $\mathbb{P}_2$ och $\mathbb{P}_3$ och använd denna till att beräkna $F(3+2x+x^2)$. Svaret skall skrivas ut som polynom, ej i bas·koordinatform.

VÄND!

4. Underrummet $\mathbb{U}$ ges av

$$\mathbb{U} = \left[\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \subset \mathbb{R}^5.$$

Bestäm $\mathbb{U}$:s dimension och en ON-bas i $\mathbb{U}$. Bestäm också en bas i det ortogonala komplementet till $\mathbb{U}$.

5. Bestäm $a, b \in \mathbb{R}$ så att $\mathbf{u} = (0, 1, 1)$ blir en egenvektor till den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som i standardbasen ges av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & a \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & b \end{pmatrix}.$$

Vad blir $\mathbf{u}$:s egenvärde? Bestäm övriga egenvärden och egenvektorer.

6. Betrakta den kvadratiska formen $Q\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definierad som

$$Q(\mathbf{u}) = Q\left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right) = -2x_1x_2 + 11x_3^2 + 4x_3x_4 + 14x_4^2.$$

Bestäm det största respektive minsta värdet som Q antar då $|\mathbf{u}| = 3$. Ange också i vilka punkter dessa antas.

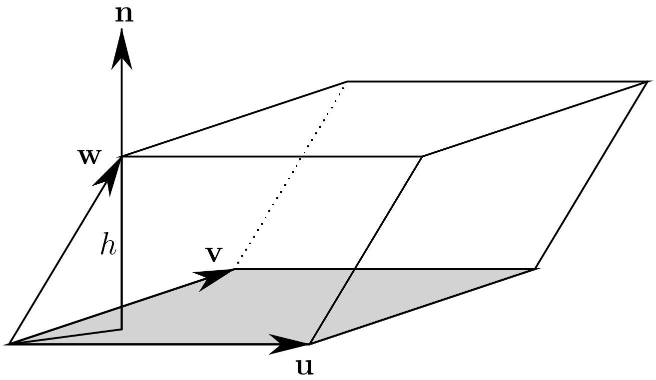
7. Låt $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning som i standardbaserna för $\mathbb{R}^n$ och $\mathbb{R}^m$ har matrisen A. Definiera den till F *adjungerade avbildningen* $F^*\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ genom sambandet

$$F(\mathbf{u}) \bullet \mathbf{v} = \mathbf{u} \bullet F^*(\mathbf{v}), \ \ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n, \ \ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m.$$

Visa att en sådan avbildning F^* existerar, ange dess avbildningsmatris och visa att $N(F) = V(F^*)^\perp$.

Lösningsförslag till TATA31, Linjär algebra, 2020–08–27

1. Vi börjar med figuren så man ser vad som skall beräknas.



Från avsnitt 2.7 fås att den sökta normalen respektive arean är

$$\mathbf{n} = \mathbf{u}\times\mathbf{v} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \times \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix},$$

$$\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{array}$$

$$A = |\mathbf{u}\times\mathbf{v}| = |\mathbf{n}| = \sqrt{(-1)^2+3^2+2^2} = \sqrt{14}.$$

Ur figuren fås nu att den sökta höjden h fås som

$$h = \left|\mathbf{w}_{\perp\mathbf{n}}\right| = \left|\frac{\mathbf{w}\bullet\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}\right| = \frac{|\mathbf{w}\bullet\mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{1}{\sqrt{14}}\left|\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}\right| = \left|\frac{-3+3-4}{\sqrt{14}}\right| = \frac{4}{\sqrt{14}}.$$

2. Enligt Definition 8.1.10, sid 207 är en avbildning diagonaliserbar om dess avbildningsmatris i någon bas är en diagonalmatris. Enligt Sats 8.1.11, sid 207 är detta ekvivalent med att det finns en bas i $\mathbb{R}^2$ av egenvektorer till F. Om denna bas kan väljas som ON-bas är avbildningen ortogonalt diagonaliserbar. Enligt spektralsatsen (Sats 8.3.5, sid 215) är detta ekvivalent med att F är symmetrisk, vilket är fallet omm $b = 6$. Vidare, om F har lika många *olika* egenvärden som rummet har dimension (i detta fall två) så är F diagonaliserbar enligt Korollarium 8.2.7, sid 212. Vi löser därför sekularekvationen för att se för vilka b vi får två olika egenvärden.

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 6 \\ b & -2-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)(-2-\lambda) - 6b = \lambda^2 - 5\lambda - 6b - 14 = 0 \iff$$

$$\iff \lambda = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 6b + 14} = \frac{5 \pm \sqrt{81+24b}}{2}.$$

Följaktligen, om

$$81 + 24b > 0 \iff b > -\frac{81}{24} = -\frac{27}{8}$$

har vi två olika egenvärden och därmed är F diagonaliserbar för dessa b.
Om $b < -27/8$ får sekularekvationen två komplexa rötter och vi har därför inga egenvärden och heller ingen bas av egenvektorer, d v s F är ej diagonaliserbar om

$b < -27/8$. Återstår att kontrollera fallet $b = -27/8$. Då $b = -27/8$ är $\lambda = 5/2$ dubbelegenvärde och vi får

$$\underline{\underline{\lambda = \frac{5}{2}}}: \quad \left(\begin{array}{cc|c} 9/2 & 6 & 0 \\ -27/8 & -9/2 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{2r_1/3 \\ -8r_2/9}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{array}\right) \overset{r_2-r_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X_{5/2} = t \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vi får endast en-dimensionellt egenrum och har alltså ingen bas av egenvektorer, d v s F är inte diagonaliserbar om $b = -27/8$. Sammanfattningsvis har vi att F är

(a) diagonaliserbar om $b > -\dfrac{27}{8}$,

(b) ortogonalt diagonaliserbar om $b = 6$ och

(c) ej diagonaliserbar om $b < -\dfrac{27}{8}$.

3. I avbildningsmatrisens kolonner står koordinaterna för vad F gör med basvektorerna i $\mathbb{P}_2$ uttryckt med basvektorerna i $\mathbb{P}_3$, d v s bestäm med hjälp av givna data $F(1), F(x), F(x^2)$. Låt $\underline{\mathbf{x}}_3$ vara standardbasen i $\mathbb{P}_3$. Vi får

$$F(x) = 2 + x + x^2 + x^3 = \underline{\mathbf{x}}_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$F(2-x) = 2F(1) - F(x) = 3x - 3x^2 + x^3 \iff$$

$$F(1) = (3x - 3x^2 + x^3 + F(x))\frac{1}{2} = (3x - 3x^2 + x^3 + 2 + x + x^2 + x^3)\frac{1}{2} =$$

$$= (2 + 4x - 2x^2 + 2x^3)\frac{1}{2} = 1 + 2x - x^2 + x^3 = \underline{\mathbf{x}}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$F(x^2) = F(x) + F(x^2) - F(x) = F(x + x^2) - F(x) =$$

$$= 5 + 4x + x^2 + 3x^3 - (2 + x + x^2 + x^3) = 3 + 3x + 2x^3 = \underline{\mathbf{x}}_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff A = \underset{F(1)\,F(x)\,F(x^2)}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}, \quad F(3 + 2x + x^2) = F\left(\underline{\mathbf{x}}_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \underline{\mathbf{x}}_3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{x}}_3 \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = 10 + 11x - x^2 + 7x^3.$$

4. Låt $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_5$ beteckna vektorerna som genererar $\mathbb{U}$. För att bestämma $\mathbb{U}$:s dimension rensar vi bort löjliga element genom att lösa beroendeekvationen. Då vi även skall bestämma en bas för $\mathbb{U}^\perp$ ställer vi på samma gång upp "linjärkombination = godtycklig vektor". Vi får då

$$\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \lambda_3\mathbf{u}_3 + \lambda_4\mathbf{u}_4 + \lambda_5\mathbf{u}_5 = \mathbf{0},\ \mathbf{x} \iff$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & x_1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 2 & 0 & x_2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & x_4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & x_5 \end{array}\right) \overset{\substack{r_3-r_1 \\ r_4-r_1 \\ r_2\leftrightarrow r_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -x_1+x_3 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 2 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1+x_4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & x_5 \end{array}\right) \overset{\substack{r_3-2r_2 \\ r_5+r_2}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -x_1+x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2x_1-2x_3+x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1+x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -x_1+x_3+x_5 \end{array}\right) \overset{r_5-r_3}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -x_1+x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2x_1+x_2-2x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1+x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3x_1-x_2+3x_3+x_5 \end{array}\right) \overset{r_1-r_2}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2x_1-x_3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -x_1+x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2x_1+x_2-2x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1+x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3x_1-x_2+3x_3+x_5 \end{array}\right).$$

Vi löser beroendeekvationen först.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\lambda_3 - \lambda_5 = -2s - t \\ \lambda_3 - \lambda_5 = s - t \\ s \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Insättning i beroendeekvationen ger

$$\underline{\underline{s = 1, t = 0}} : -2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 = \mathbf{0} \iff \mathbf{u}_3 = 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2,$$
$$\underline{\underline{s = 0, t = 1}} : -\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_+\mathbf{u}_5 = \mathbf{0} \iff \mathbf{u}_5 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$

varur följer att vi kan utse $\mathbf{u}_3$ och $\mathbf{u}_5$ till löjliga element. Satsen om löjliga element (Sats 5.3.16, sid 111) ger då att

$$\mathbb{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cancel{\mathbf{u}_3}, \mathbf{u}_4, \cancel{\mathbf{u}_5}] = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4]$$

vilket ger $\dim \mathbb{U} = 3$. När vi skall bestämma en ON-bas i $\mathbb{U}$ underlättar det om vi observerar att $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_4$. Sätt därför $\mathbf{f}_1 = \widehat{\mathbf{u}}_1$ och $\mathbf{f}_2 = \widehat{\mathbf{u}}_4$ och ortogonalisera $\mathbf{u}_2$. Vi får

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_{2\,\|[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]} = (\mathbf{u}_2\bullet\mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1 + (\mathbf{u}_2\bullet\mathbf{f}_2)\,\mathbf{f}_2 =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\\-1\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\\-1\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{4}{3}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}8\\0\\8\\8\\0\end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\3\\0\\0\\3\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{6}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}8\\3\\8\\8\\3\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_{2\,\perp[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_{2\,\|[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]} = \frac{1}{6}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}6\\12\\12\\6\\-6\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}8\\3\\8\\8\\3\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{6}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2\\9\\4\\-2\\-9\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_3 = \widehat{\mathbf{u}_{2\,\perp[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}} = \frac{1}{\sqrt{186}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2\\9\\4\\-2\\-9\end{pmatrix}.$$

Vi har därmed att $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ är en ON-bas i $\mathbb{U}$ och att $\dim \mathbb{U} = 3$.
Ur "linjärkombination = godtycklig vektor" följer att en vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{U}$, d v s är linjärkombination av de genererande vektorerna om ekvationssystemet är lösbart, vilket det är om uttrycken i nollradernas högerled är $= 0$. Följaktligen

$$\mathbb{U} = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5\colon \begin{array}{rl} -x_1 \quad + \quad\quad x_4 \quad & = 0 \\ -3x_1 - x_2 + 3x_3 \;+\; x_5 & = 0 \end{array}\right\}$$

Skriver vi de definierande ekvationerna som skalärprodukter fås

$$-x_1 + x_4 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix} = 0, \quad -3x_1 - x_2 + 3x_3 + x_5 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-3\\-1\\3\\0\\1\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix} = 0,$$

d v s $\mathbb{U}$ består av de vektorer som är ortogonala mot $\mathbf{u}_4 = (-1, 0, 0, 1, 0)$ och $\mathbf{u}_5 = (-3, -1, 3, 0, 1)$. Följaktligen är $\mathbf{u}_4$ och $\mathbf{u}_5$ en bas i $\mathbb{U}^\perp$.

5. Enligt definitionen av egenvärde och egenvektor (Definition 8.1.1, sid 205) är $\mathbf{u}$ en egenvektor med egenvärde λ om $F(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u}$. Insättning av $\mathbf{u}$ i F ger då

$$F(\mathbf{u})=F\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2&3&a\\-1&2&1\\-1&3&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3+a\\3\\3+b\end{pmatrix}=\lambda\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\\lambda\\\lambda\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases}3+a=0\\ \quad 3 \ \ =\lambda\\ 3+b=\lambda\end{cases} \iff \begin{cases}a=-3\\ \lambda=\ \ 3\\ b=\ \ 0\end{cases},$$

d v s $\mathbf{u} = (0, 1, 1)$ är en egenvektor med egenvärde 3 om $a = -3$ och $b = 0$. För att bestämma övriga egenvärden löser vi sekularekvationen.

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}2-\lambda&3&-3\\-1&2-\lambda&1\\-1&3&-\lambda\end{vmatrix}\overset{k_1+k_3}{=}\begin{vmatrix}-1-\lambda&3&-3\\0&2-\lambda&1\\-1-\lambda&3&-\lambda\end{vmatrix}\overset{r_3-r_1}{=}$$

$$=(-1-\lambda)\begin{vmatrix}1&3&-3\\0&2-\lambda&1\\0&0&3-\lambda\end{vmatrix}=(-1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)=0\iff$$

$$\iff \lambda=-1,2,3.$$

Egenvektorn till 3 vet vi redan så det återstår endast att bestämma egenvektorerna till -1 och 2.

$$\underline{\underline{\lambda=-1}}:\quad \left(\begin{array}{ccc|c}3&3&-3&0\\-1&3&1&0\\-1&3&1&0\end{array}\right)\underset{\sim}{\overset{\substack{r_1-3r_2\\r_3+r_2\\r_1\leftrightarrow r_2}}{}}\left(\begin{array}{ccc|c}-1&3&1&0\\0&12&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\Longrightarrow X_{-1}=t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R},$$

$$\underline{\underline{\lambda=2}}:\quad \left(\begin{array}{ccc|c}0&3&-3&0\\-1&0&1&0\\-1&3&2&0\end{array}\right)\underset{\sim}{\overset{\substack{r_3-r_2\\r_1\leftrightarrow r_2}}{}}\left(\begin{array}{ccc|c}-1&0&1&0\\0&3&-3&0\\0&3&-3&0\end{array}\right)\underset{\sim}{\overset{\substack{r_3-r_2\\r_2/3}}{}}\left(\begin{array}{ccc|c}-1&0&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X_2=t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R}.$$

6. Skriv Q på matrisform.

$$Q(\mathbf{u})=Q\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\right)=-2x_1x_2+11x_3^2+4x_3x_4+14x_4^2=$$

$$=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3&x_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&11&2\\0&0&2&14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=X^tAX$$

och beräkna egenveärdena.

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-\lambda&-1&0&0\\-1&-\lambda&0&0\\0&0&11-\lambda&2\\0&0&2&14-\lambda\end{vmatrix}\overset{\substack{r_2+r_1\\r_3+2r_4}}{=}\begin{vmatrix}-\lambda&-1&0&0\\-1-\lambda&-1-\lambda&0&0\\0&0&15-\lambda&30-2\lambda\\0&0&2&14-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1-\lambda)(15-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 14-\lambda \end{vmatrix} \overset{\substack{r_1+r_2 \\ r_4-2r_3}}{=} \\
&= (-1-\lambda)(15-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 10-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= (-1-\lambda)(15-\lambda)(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 10-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= (-1-\lambda)(15-\lambda)(1-\lambda)(10-\lambda) = 0 \iff \lambda = \pm 1, 10, 15.
\end{aligned}
$$

Enligt Sats 9.1.11, sid 227 gäller

$$\lambda_{\text{min}}|\mathbf{u}|^2 \leq Q(\mathbf{u}) \leq \lambda_{\text{max}}|\mathbf{u}|^2$$

med likhet i olikheterna ovan då $\mathbf{u}$ är en egenvektor till motsvarande egenvärde. Då vi söker max och min då $|\mathbf{u}| = 3$ fås

$$(-1)|3|^2 = -9 \leq Q(\mathbf{u}) \leq 15 \cdot 9 = 135$$

och vi behöver bara bestämma egenvektorerna till -1 och 15.

$$\underline{\underline{\lambda = -1}}: \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 15 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2+r_1 \\ r_3-6r_4}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -88 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 15 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_{-1} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\underline{\underline{\lambda = 15}}: \quad \left(\begin{array}{cccc|c} -15 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_1-15r_2 \\ r_3+2r_4}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 224 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_{15} = t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Sätt

$$\widehat{\mathbf{u}}_{\text{min}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{u}}_{\text{max}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

så att $\pm 3\widehat{\mathbf{u}}_{\text{min}}$ och $\pm 3\widehat{\mathbf{u}}_{\text{max}}$ är egenvektorer med längd 3 till det största respektive minsta egenvärdet. Då fås enligt ovan nänmda sats att

$$Q(\pm 3\widehat{\mathbf{u}}_{\text{min}}) = -9 \quad \text{och} \quad Q(\pm 3\widehat{\mathbf{u}}_{\text{max}}) = 135\ ,$$

d v s min då $|\mathbf{u}| = 3$ antas i $\pm\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$ och max antas i $\left(0, 0, \frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$.

7. Beteckna standardbaserna i $\mathbb{R}^n$ och $\mathbb{R}^m$ som $\underline{\mathbf{e}}_n$ respektive $\underline{\mathbf{e}}_m$ och skriv skalärprodukterna i definitionen av F^* som matrisprodukter. Med $\mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}}_n X \in \mathbb{R}^n$ och $\mathbf{v} = \underline{\mathbf{e}}_m Y \in \mathbb{R}^m$, d v s X är en $n{\times}1$-matris och Y är en $m{\times}1$-matris. Då fås

$$\begin{aligned} F(\mathbf{u}){\bullet}\mathbf{v} &= F(\underline{\mathbf{e}}_n X){\bullet}\underline{\mathbf{e}}_m Y = \underline{\mathbf{e}}_m AX{\bullet}\underline{\mathbf{e}}_m Y = (AX)^t Y = (X^t A^t)Y = X^t(A^t Y) = \\ &= \underline{\mathbf{e}}_n X{\bullet}\underline{\mathbf{e}}_n A^t Y = \mathbf{u}{\bullet}F^*(\mathbf{v}), \end{aligned}$$

d v s en avbildning $F^*\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ med den sökta egenskapen existerar och är alltså den linjära avbildning som har A^t som avbildningsmatris i standardbaserna för $\mathbb{R}^m$ och $\mathbb{R}^n$. För att visa att $N(F) = V(F^*)^\perp$ tar vi $\mathbf{u} \in N(F)$ och visar att detta ger att $\mathbf{u} \in V(F^*)^\perp$ och sedan tvärtom. Tag godtyckligt $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ och $\mathbf{u} \in N(F) \subset \mathbb{R}^n$. Då fås

$$0 = \mathbf{0}{\bullet}\mathbf{v} = F(\mathbf{u}){\bullet}\mathbf{v} = \mathbf{u}{\bullet}F^*(\mathbf{v}).$$

Då $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ är godtyckligt betyder detta att $\mathbf{u} \perp V(F^*)$, d v s $\mathbf{u} \in V(F^*)^\perp$ och därmed $N(F) \subset V(F^*)^\perp$.
Omvänt, antag att $\mathbf{u} \in V(F^*)^\perp$. Detta innebär att

$$0 = \mathbf{u}{\bullet}F^*(\mathbf{v}) = F(\mathbf{u}){\bullet}\mathbf{v}$$

för varje $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$. Den enda vektor som är ortogonal mot *alla* element i $\mathbb{R}^m$ är nollvektorn, d v s $F(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ vilket är detsamma som att säga att $\mathbf{u} \in N(F)$ och därmed att $V(F^*)^\perp \subset N(F)$. Då vi sen tidigare visat att $N(F) \subset V(F^*)^\perp$ följer det att $N(F) = V(F^*)^\perp$.
Anmärkning: Man kan också tolka vad som faktiskt händer då man beräknar matrisprodukten AX då X är koordinatmatris för $\mathbf{u} \in N(F)$. Låt $Y_1, \ldots, Y_m$ vara kolonnvektorerna i A^t så att

$$V(F^*) = [\underline{\mathbf{e}}_n Y_1, \underline{\mathbf{e}}_n Y_2, \ldots, \underline{\mathbf{e}}_n Y_m,].$$

Då blir ${Y_1}^t, {Y_2}^t, \ldots, {Y_m}^t$ radvektorer i $n{\times}m$-matrisen A. Vi får följande schematiska bild

$$AX = \begin{pmatrix} \cdots & Y_1^t & \cdots \\ \cdots & Y_2^t & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & Y_m^t & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ X \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1^t X \\ Y_2^t X \\ \vdots \\ Y_m^t X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

d v s om $\mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}}_n X \in N(F)$ så är $\mathbf{u} \perp$ raderna i A som är kolonnerna i A^t vilka är det som bygger upp $V(F^*)$. Följaktligen är $N(F)$ ortogonalt mot $V(F^*)$, d v s $N(F) = V(F^*)^\perp$. VSB