Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Ulf Janfalk

Utbildningskod: TATA31
Modul: TEN1

Tentamen i Linjär algebra (TATA31/TEN1) 2020–01–16, 14–19.

Inga hjälpmedel, förutom passare, linjal eller gradskiva. OBS! Inga formler eller liknande tryckta på linjal eller gradskiva. Ej räknedosa.
För godkänt räcker 9 poäng och minst 3 uppgifter med 2 eller 3 poäng. Godkänd kontrollskrivning ($\geq$ 11p) ht2019 ger 3 poäng på uppgift 1 (som alltså inte behöver lösas) och 16p eller mer ger 4 poäng på uppgift 1. Markera detta genom att skriva ”G” respektive ”G+1” i rutan för uppgift 1.
Fullständiga motiveringar krävs. Lösningar läggs ut efter skrivtidens slut på

http://courses.mai.liu.se/GU/TATA31/tentor.html

Resultat meddelas via e-post inom 10 arbetsdagar.
Alla koordinater för vektorer och punkter är, om ej annat anges, givna med avseende på ett positivt orienterat ON-system, $\mathbb{R}^n$ är ett euklidiskt rum med standardskalärprodukten och standardbasen ett positivt orienterat ON-system.

(3 p) 1. Bestäm de reella talen $a, b \in \mathbb{R}$ så att planen

$$\Pi_1\colon\ x + ay + z = b, \quad \Pi_2\colon\ 2x + 3y + az = 2, \quad \Pi_3\colon\ 3x + 4y + 3z = 2$$

skär varann längs en linje som, om möjligt innehåller punkten $P = (9, -7, 1)$. Ange i så fall linjen på parmeterform.

(3 p) 2. Låt $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5$ vara en linjär avbildning med avbildningsmatris

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 3 & -3 \\ 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

i standardbaserna för $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^5$ och låt $F^*\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som har A^t som avbildningsmatris i standardbaserna för $\mathbb{R}^5$ och $\mathbb{R}^2$. Visa att $F^* \circ F$ är symmetrisk och bestäm en ON-bas av egenvektorer till $F^* \circ F$. Låt $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$ vara egenvektorerna du just bestämt. Beräkna $F(\mathbf{f}_1)$ och $F(\mathbf{f}_2)$.

(3 p) 3. Låt $\mathbf{v} = (1, 2, 3, 2, 1)$ och betrakta underrummet

$$\mathbb{U} = [(1, 0, 1, 0, -2), (1, 0, -3, 0, 2), (0, 1, 0, -1, 0)] \subset \mathbb{R}^5.$$

Beräkna

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathbb{U}} |\mathbf{v} - \mathbf{u}|$$

samt för vilket $\mathbf{u} \in \mathbb{U}$ som detta minsta värde antas.

(3 p) 4. En lampa placeras i origo och skickar ut ljus i alla riktningar. En triangulär skärm placeras med hörnen i punkterna $(1, 1, 3)$, $(0, -1, 1)$ och $(1, 2, 5)$. Avgör om punkten $P = (60, 30, 270)$ skuggas av skärmen.

(3 p) 5. Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{P}_4 \to \mathbb{P}_2$ har i standardbaserna för $\mathbb{P}_4$ och $\mathbb{P}_2$ matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 & 1 & a \\ 2 & 5 & 3 & -1 & b \\ 1 & 4 & 0 & -2 & c \end{pmatrix}$$

där $a, b, c \in \mathbb{R}$. Bestäm a, b, c så att

$$\mathbf{q} = 1 - x + x^2 + x^3 + x^4 \in N(F)$$

och bestäm därefter bas och dimension för noll- respektive värderum.
OBS! Basvektorerna skall i svaret skrivas som polynom!

(3 p) 6. Avgör vilken sorts yta som definieras av ekvationen

$$9x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 8x_2^2 + 4x_2x_3 + 9x_3^2 = 2.$$

Ange de punkter på ytan som ligger närmast respektive längst ifrån origo (om sådana finnes) samt vilket avstånd dessa har till origo.

(3 p) 7. Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definieras av

$$F(x_1, x_2, x_3) = (-x_2 - 2x_3, x_1 - 2x_3, 2x_1 + 2x_2).$$

Bestäm F:s matris i standardbasen och ge en fullständig geometrisk beskrivning av vad F gör med vektorerna i $\mathbb{R}^3$.

Lösningsförslag till TATA31, Linjär algebra, 2020–01–16

1. Skärningspunkterna mellan planen fås genom att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + ay + z = b \\ 2x + 3y + az = 2 \\ 3x + 4y + 3z = 2 \end{cases} \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & b \\ 2 & 3 & a & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right).$$

Börja med att beräkna nollställena till koefficientmatrisens determinant.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & 3 & a \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} \overset{k_1-k_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ 2-a & 3 & a \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{utv. efter} \\ \text{kol. 1} \end{bmatrix} =$$

$$= (2-a)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (a-2)(3a-4) = 0 \iff a = 2, \frac{4}{3}.$$

Determinantkriteriet (Sats 4.7.2, sid 93) ger då att systemet har entydig lösning. d.v.s. planen skär varann i *en* punkt om $a \neq 2, \dfrac{4}{3}$ och inte alls eller längs en linje om $a = 2$ eller $a = \dfrac{4}{3}$. Då vi är ute efter en skärningslinje undersöks fallen $a = 2$ och $a = \dfrac{4}{3}$ separat.

$$\underline{\underline{a=2}}: \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & b \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-3r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & b \\ 0 & -1 & 0 & 2-2b \\ 0 & -2 & 0 & -3b+2 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-3r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & b \\ 0 & 1 & 0 & 2b-2 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \end{array}\right),$$

d.v.s. lösning saknas om $b \neq 2$ och planen skär varann längs en linje om $b = 2$. Om vi löser systemet för $a = b = 2$ fås skärningslinjen

$$L_1\colon\ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2-2y-z = 10-t \\ 2 \\ t \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vi ser här också att den givna punkten $P = (9, -7, 1)$ aldrig kan ligga på linjen eftersom y-koordinaten är 2 för alla punkter på linjen.

$$\underline{\underline{a=\tfrac{4}{3}}}: \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4/3 & 1 & b \\ 2 & 3 & 4/3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 3 & 3b \\ 6 & 9 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 3 & 3b \\ 0 & 1 & -2 & 6-6b \\ 0 & 0 & 0 & 2-3b \end{array}\right),$$

d.v.s. lösning saknas om $b \neq 2/3$. För $a = 4/3, b = 2/3$ skär planen varann längs linjen

$$L_2\colon\ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2/3 - 4y/3 - z = -2-11t \\ 2+2z = 2+6t \\ 3t \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -11 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

För att en punkt på L_2 skall ha z-koordinat 1 måste $t = \dfrac{1}{3}$ vilket ger en punkt skild från P. Följaktligen finns ingen skärningslinje genom $P = (9, -7, 1)$ för några värden på a, b.

2. Enligt Sats 7.6.2, sid 186 är A^tA avbildningsmatris till $F^*\circ F$. Eftersom

$$A^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 3 & -3 \\ 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & -3 \\ -3 & 19 \end{pmatrix}$$

är symmetrisk och avbildningsmatris till $F^*\circ F$ i ON-basen standardbasen så följer det ur Sats 7.7.14, sid 198 att $F^*\circ F$ är symmetrisk.
Beräkna egenvärden och egenvektorer till A^tA.

$$\det(A^tA - \lambda I) = \begin{pmatrix} 19-\lambda & -3 \\ -3 & 19-\lambda \end{pmatrix} = (19-\lambda)^2 - 3^2 = 0 \iff \lambda = 19 \pm 3 = 22, 16,$$

$$\underline{\underline{\lambda = 22}}: \quad \left(\begin{array}{cc|c} -3 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_{22} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{\lambda = 16}}: \quad \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_{16} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sätter vi

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

så är $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ en ON-bas i $\mathbb{R}^2$ av egenvektorer till $F^*\circ F$. Slutligen, låt $\underline{\mathbf{e}}_2$ och $\underline{\mathbf{e}}_5$ vara stndardbaserna i $\mathbb{R}^2$ respektive $\mathbb{R}^5$

$$F(\mathbf{f}_1) = F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}_5\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 3 & -3 \\ 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}_5\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}_5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$F(\mathbf{f}_2) = F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}_5\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 3 & -3 \\ 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}_5\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{4}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}_5\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Anmärkning: Notera att $F(\mathbf{f}_1)$ och $F(\mathbf{f}_2)$ kan skrivas

$$F(\mathbf{f}_1) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{11}}{\sqrt{11}}\underline{\mathbf{e}}_5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{22}\frac{1}{\sqrt{11}}\underline{\mathbf{e}}_5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad F(\mathbf{f}_2) = \sqrt{16}\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}_5\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

d.v.s. ON-basen av egenvektorer till $F^*\circ F$ avbildas av F på en ortogonal mängd där respektive bildvektor fått längden $\sqrt{\text{egenvärdet}}$. Detta är ett exempel på en generell egenskap av enormt stor betydelse i moderna tillämpningar av linjär algebra. Talen $\sqrt{\text{egenvärde till } A^tA}$ kallas A:s *singulärvärden.*

3. Eftersom

$$\text{Minsta avstånd} = \text{ortogonalt avstånd} \qquad \text{(Sats 6.3.15, sid 150)}$$

följer det att

$$\min_{\mathbf{u}\in\mathbb{U}} |\mathbf{v}-\mathbf{u}| = \left|\mathbf{v}-\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}\right| = \left|\mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}}\right|.$$

Bestäm därför en ON-bas i $\mathbb{U}$ och beräkna $\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}$ med hjälp av Sats 6.3.9, sid 146. Sätt

$$\mathbf{u}_1 = (0,1,0,-1,0), \quad \mathbf{u}_2 = (1,0,1,0,-2), \quad \mathbf{u}_3 = (1,0,-3,0,2).$$

Då $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2$ väljer vi

$$\mathbf{f}_1 = \widehat{\mathbf{u}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \widehat{\mathbf{u}}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\-2\end{pmatrix}$$

och ortogonaliserar $\mathbf{u}_3$.

$$\mathbf{u}_{3_{\|\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2}} = (\mathbf{u}_3\bullet\mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1 + (\mathbf{u}_3\bullet\mathbf{f}_2)\,\mathbf{f}_2 = 0\cdot\mathbf{f}_1 + \frac{1}{6}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-3\\0\\2\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\-2\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\-2\end{pmatrix} = -\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\-2\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_{3_{\perp\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2}} = \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_{3_{\|\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2}} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-3\\0\\2\end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\-2\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Med $\mathbf{v} = (1,2,3,2,1)$ fås

$$\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} = \underbrace{(\mathbf{v}\bullet\mathbf{f}_1)}_{=0}\,\mathbf{f}_1 + (\mathbf{v}\bullet\mathbf{f}_2)\,\mathbf{f}_2 + (\mathbf{v}\bullet\mathbf{f}_3)\,\mathbf{f}_3 =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\2\\1\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\-2\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\-2\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\2\\1\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\0\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{2}{6}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\-2\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\-2\end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-3\\0\\3\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2\\0\\4\\0\\-2\end{pmatrix}$$

så att det sökta avståndet blir

$$\min_{\mathbf{u}\in\mathbb{U}} |\mathbf{v}-\mathbf{u}| = \left|\mathbf{v}-\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}\right| = \left|\frac{1}{3}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\6\\9\\6\\3\end{pmatrix}+\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\0\\-4\\0\\2\end{pmatrix}\right)\right| = \left|\frac{1}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}5\\6\\5\\6\\5\end{pmatrix}\right| =$$
$$= \frac{1}{3}\sqrt{3{\cdot}5^2+2{\cdot}6^2} = \frac{1}{3}\sqrt{75+72} = \frac{1}{3}\sqrt{147} = \frac{7}{\sqrt{3}}.$$

4. Inför skärmens hörnpunkters ortsvektorer som ny bas. I denna bas får skärmens hörn koordinaterna $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ och $(0,0,1)$. Skärmen kommer då att hamna i planet med ekvation $y_1+y_2+y_3=1$ (eftersom alla tre punkterna uppfyller denna ekvation och ett plan är entydigt bestämt av tre punkter som ej ligger längs samma linje). De punkter som då hamnar i skärmens skugga blir därmed de som har positiva koordinater i den nya basen och vars koordinatsumma är större än 1. Vi får bassambandet

$$\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}T = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&-1&2\\3&1&5\end{pmatrix}.$$

Beräkna T^{-1} och använd sedan den till att bestämma koordinaterna för P i den nya basen.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\1&-1&2&0&1&0\\3&1&5&0&0&1\end{array}\right)\underset{r_3-3r_1}{\overset{r_2-r_1}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&-1&1&-1&1&0\\0&1&2&-3&0&1\end{array}\right)\overset{\substack{r_3+r_2\\-3r_2\\3r_1}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&0&3&3&0&0\\0&3&-3&3&-3&0\\0&0&3&-4&1&1\end{array}\right)\underset{r_1-r_3}{\overset{r_2+r_3}{\sim}}$$
$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&0&0&7&-1&-1\\0&3&0&-1&-2&1\\0&0&3&-4&1&1\end{array}\right)\Longrightarrow T^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}7&-1&-1\\-1&-2&1\\-4&1&1\end{pmatrix}$$
$$\overline{OP} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}60\\30\\270\end{pmatrix} = 30\,\underline{\mathbf{f}}\,\frac{1}{3}\begin{pmatrix}7&-1&-1\\-1&-2&1\\-4&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\9\end{pmatrix} = 10\,\underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix}4\\5\\2\end{pmatrix}.$$

Eftersom P:s koordinater i nya basen är >0 och deras summa större än 1 följer det att P ligger i skärmens skugga.

5. Låt $\underline{\mathbf{x}}_4$ och $\underline{\mathbf{x}}_2$ vara standardbaserna i $\mathbb{P}_4$ respektive $\mathbb{P}_2$. Börja med att bestämma a,b,c så att $\mathbf{q}\in N(F)$.

$$F(\mathbf{q}) = F(1-x+x^2+x^3+x^4) = F\left(\underline{\mathbf{x}}_4\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \underline{\mathbf{x}}_2\begin{pmatrix}-1&-3&-1&1&a\\2&5&3&-1&b\\1&4&0&-2&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\\1\end{pmatrix} =$$
$$= \underline{\mathbf{x}}_2\begin{pmatrix}a+2\\b-1\\c-5\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{x}}_2\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff a=-2,\ b=1,\ c=5.$$

Beräkna sedan en bas i $N(F)$ genom att lösa ekvationen $AX = \mathit{0}$. Eftersom $V(F)$ är höljet av kolonnvektorerna blir beroendeekvationen för kolonnvektorerna samma ekvation $AX = \mathit{0}$. För kontrollens skull tar vi även med ekvationen "linjärkombintion av kolonnerna = godtycklig vektor". Tar vi allt detta samtidigt fås

$$\left(\begin{array}{rrrrr|rr} -1 & -3 & -1 & 1 & -2 & 0 & a_0 \\ 2 & 5 & 3 & -1 & 1 & 0 & a_1 \\ 1 & 4 & 0 & -2 & 5 & 0 & a_2 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2+2r_1 \\ r_3+r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{rrrrr|rc} 1 & 3 & 1 & -1 & 2 & 0 & -a_0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -3 & 0 & 2a_0+a_1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 3 & 0 & a_0+a_2 \end{array}\right) \overset{r_3+r_2}{\sim}$$
$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|rc} 1 & 3 & 1 & -1 & 2 & 0 & -a_0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -3 & 0 & 2a_0+a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3a_0+a_1+a_2 \end{array}\right) \overset{\substack{r_1+3r_2 \\ -r_2}}{\sim} \left(\begin{array}{rrrrr|rc} 1 & 0 & 4 & 2 & -7 & 0 & 5a_0+3a_1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 3 & 0 & -2a_0-a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3a_0+a_1+a_2 \end{array}\right).$$

Vi börjar med $N(F)$ och får då

$$X_0 = \begin{pmatrix} -4r-2s+7t \\ r+s-3t \\ r \\ s \\ t \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r, s, t \in \mathbb{R} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \mathbf{p}_1 = \underline{\mathbf{x}}_4 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -4 + x + x^2, \quad \mathbf{p}_2 = \underline{\mathbf{x}}_4 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 + x + x^3,$$

$$\mathbf{p}_3 = \underline{\mathbf{x}}_4 \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 7 - 3x + x^4,$$

d.v.s. $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ är en bas i $N(F)$ som därmed har dimension 3.
För värderummets del betraktar vi nu nollrumslösningen som lösning till beroende-ekvationen för A:s kolonnvektorer. Kallar vi kolonnvektorerna för $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4, \mathbf{q}_5$ så fås

$$\begin{aligned} &\underline{\underline{\underline{r = 1, s = t = 0}}}: \quad -4\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 = \mathbf{0} \iff \mathbf{q}_3 = 4\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2, \\ &\underline{\underline{\underline{s = 1, r = t = 0}}}: \quad -2\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_4 = \mathbf{0} \iff \mathbf{q}_4 = 2\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2, \\ &\underline{\underline{\underline{t = 1, r = s = 0}}}: \quad 7\mathbf{q}_1 - 3\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_5 = \mathbf{0} \iff \mathbf{q}_5 = -7\mathbf{q}_1 + 3\mathbf{q}_2. \end{aligned}$$

Satsen om löjliga element (Sats 5.3.16, sid 111) ger då att

$$V(F) = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4, \mathbf{q}_5] = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2] = \left[\underline{\mathbf{x}}_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{x}}_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}\right] =$$
$$= [-1 + 2x + x^2, -3 + 5x + 4x^2]$$

så $-1 + 2x + x^2, -3 + 5x + 4x^2$ är en bas i $V(F)$ och därmed $\dim V(F) = 2$.

6. Skriv den kvadratiska formen på matrisform och beräkna dess egenvärden.

$$Q(\mathbf{u}) = Q\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = 9x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 8x_2^2 + 4x_2x_3 + 9x_3^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = X_{\underline{\mathbf{e}}}^t A_{\underline{\mathbf{e}}} X_{\underline{\mathbf{e}}},$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 8-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 9-\lambda \end{vmatrix} \overset{r_3-r_1}{=} \begin{vmatrix} 9-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 8-\lambda & 2 \\ \lambda-8 & 0 & 8-\lambda \end{vmatrix} \overset{k_1+k3}{=}$$

$$= (8-\lambda)\begin{vmatrix} 10-\lambda & 2 & 1 \\ 4 & 8-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (8-\lambda)\begin{vmatrix} 10-\lambda & 2 \\ 4 & 8-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (8-\lambda)((10-\lambda)(8-\lambda) - 8) = (8-\lambda)(\lambda^2 - 18\lambda + 72) = 0 \iff$$

$$\iff \lambda = 8, 9 \pm \sqrt{81-72} = 9 \pm 3 = 12, 6.$$

Då egenvärdena är positiva är ytan en ellipsoid. Största och minsta avstånd ges då av längderna av ellipsoidens stor- och lillaxel. Låt nu $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ vara en ON-bas av egenvektorer där $\mathbf{f}_1$ är egenvektor till 6, $\mathbf{f}_2$ till 8 och $\mathbf{f}_3$ till 12. Då gäller att

$$Q(\mathbf{u}) = Q\left(\underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = 6y_1^2 + 8y_2^2 + 12y_3^2 = 2 \iff$$

$$\iff 3y_1^2 + 4y_2^2 + 6y_3^2 = \left(\frac{y_1}{1/\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{1/\sqrt{4}}\right)^2 + \left(\frac{y_3}{1/\sqrt{6}}\right)^2 = 1.$$

Detta innebär att minsta respektive största avstånd från origo har vi i punkterna vars ortsvektorer i nya basen är

$$\underline{\underline{\text{Minsta avstånd}}}: \quad \overline{OP}_{min} = \pm\underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{f}_3, \quad |\overline{OP}_{min}| = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\underline{\underline{\text{Största avstånd}}}: \quad \overline{OP}_{max} = \pm\underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{f}_1 \quad |\overline{OP}_{max}| = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Det som återstår är därmed att beräkna egenvektorerna till 6 (som ger max) och 12 (som ger min).

$$\underline{\underline{\lambda = 6}}: \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_1-3r_3 \\ r_2-2r_3 \\ r_3\leftrightarrow r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_3-2r_2 \\ -r_2/2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X_6 = t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow P_{max} = \frac{\pm 1}{3\sqrt{2}}(1, -2, 1),$$

$$\underline{\underline{\lambda = 12}}: \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_1+3r_3 \\ r_2-2r_3 \\ r_3 \leftrightarrow r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -8 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & -8 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_3+r_2 \\ -r_2/8}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X_{12} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow P_{min} = \frac{\pm 1}{3\sqrt{2}}(1,1,1)$$

7. Vi börjar med att skriva uttrycket för avbildningen på matrisform.

$$F(x_1, x_2, x_3) = (-x_2 - 2x_3, x_1 - 2x_3, 2x_1 + 2x_2) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -x_2 - 2x_3 \\ x_1 - 2x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Då matrisen varken är symmetrisk (den är anti-symmetrisk, $A^t = -A$) eller ortonormal är inte F någon av standardavbildningarna. Vi prövar och ser vad F har för egenvärden.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -2 \\ 1 & -\lambda & -2 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} \overset{k_1 - k_2}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -2 \\ 1+\lambda & -\lambda & -2 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Utv. efter} \\ \text{kolonn 1} \end{bmatrix} =$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}(1+\lambda) \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 + 4) - (1+\lambda)(\lambda + 4) =$$

$$= (4 - 4\lambda + \lambda^2 - \lambda^3) - (4 + 5\lambda + \lambda^2) = -9\lambda - \lambda^3$$

vilket inte ger så mycket mer än att 0 är ett egenvärde. Beräkna istället $N(F)$ och $V(F)$. Tag med ekvationen "linjärkombination = godtycklig vektor" för att få ekvationer för $V(F)$. Vi får

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & -1 & -2 & 0 & y_1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & y_2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & y_3 \end{array}\right) \overset{\substack{r_3 - 2r_2 \\ -r_1 \\ r_1 \leftrightarrow r_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & 0 & y_2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -y_1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & -2y_2 + y_3 \end{array}\right) \overset{r_3 - 2r_2}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & 0 & y_2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2y_1 - 2y_2 + y_3 \end{array}\right).$$

Här ser vi att ekvationen $AX = 0$ har lösningen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \Longrightarrow N(F) = [2, -2, 1]$$

och att ekvationen "linjärkombination = godtycklig vektor" är lösbar omm

$$2y_1 - 2y_2 + y_3 = 0, \text{ d.v.s. } V(F) = \big\{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3\colon 2y_1 - 2y_2 + y_3 = 0\big\}.$$

Notera nu att basvektorn för $N(F)$ är normalvektor till planet som är $V(F)$, d.v.s. $N(F) = V(F)^\perp$. Sätt därför $\mathbf{f}_1 = \dfrac{1}{3}(2, -2, 1)$ och fyll ut till en höger ON-bas med, t.ex.

$$\mathbf{f}_2 = \frac{1}{3} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_3 = \mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2 = \frac{1}{3^2} \underline{\mathbf{e}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 2 \\ -2 \end{array} \times \underline{\mathbf{e}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ 2 \\ 1 \end{array} = \frac{1}{3^2} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}T = \frac{1}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = T^t.$$

Byte till denna ger

$$A_{\underline{\mathbf{f}}} = T^{-1}A_{\underline{\mathbf{e}}}T = \frac{1}{3}T^{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}T^t\begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 9 & 0 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ur denna matris kan vi nu se F som en sammansättning av tre avbildningar, först en ortogonalprojektion på planet som utgör $V(F)$ sedan en vridning 90° moturs kring $\mathbf{f}_1$ följt av sträckning en faktor 3. Detta kan motiveras genom att faktorisera matrisen

$$3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

där var och en av matrisfaktorerna ovan är matris för ovannämnda standardavbildningar. Man kan också utifrån detta se att $F(\mathbf{u}) = 3\mathbf{f}_1 \times \mathbf{u}$.