LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Ulf Janfalk

Utbildningskod: TATA31
Provkod: KTR1

Kontrollskrivning i Linjär algebra 2020–11–01, 8–12.

Inga hjälpmedel, förutom passare, linjal eller gradskiva. OBS! Inga formler eller liknande tryckta på linjal eller gradskiva. Ej räknedosa.
På uppgift 1–14 skall ***endast svar*** ges. Varje rätt svar ger 1 poäng, fel svar 0 poäng.
Flera svar får och bör ges på samma blad, helst i nummerordning.
Uppgift 15 och 16 ger tre poäng vardera; ***fullständiga och välmotiverade lösningar krävs.***
Minst 11 poäng tillgodoräknas som tre poäng på uppgift 1 på tentamen.
Minst 16 poäng ger ytterligare en bonuspoäng på tentamen.
Rätten att tillgodoräkna sig bonus består under läsåret 2020-2021.
Resultatet meddelas via e-post. Lösningar läggs ut efter skrivtidens slut på

http://courses.mai.liu.se/GU/TATA31/tentor.html

Om inget annat sägs, är alla koordinater för vektorer i planet och rummet givna relativt en högerorienterad ON-bas.

1. Skriv nedanstående ekvationssystem i matrisform och ange dess lösningar på parameterform
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_4 + x_6 = 1 \\ x_3 - x_6 = 0 \\ x_5 + x_6 = 0 \end{cases}$$

2. Betrakta matriserna
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Beräkna det/de av uttrycken nedan som är definierade:
$$AA, \quad AB, \quad A^tB, \quad AA^t + B.$$

3. Tag ett nytt pappersark och rita på detta ett vanligt rätvinkligt koordinatsystem (höger ON). Låt **två rutor** svara mot **en längdenhet**. Låt $\underline{\mathbf{e}}$ vara en ON-bas där $\mathbf{e}_1$ pekar i den vågräta koordinataxelns riktning och $\mathbf{e}_2$ i den lodräta axelns riktning. Rita i detta koordinatsystem in, så exakt som möjligt, vektorerna $\mathbf{u} = 8\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$, $\mathbf{v} = -5\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$, den ortogonala projektionen av $\mathbf{u}$ på $\mathbf{v}$ och den ortogonala projektionen av $\mathbf{v}$ på $\mathbf{u}$.

4. Låt $\mathbf{u} = \mathrm{e}^x + 2\sin x$, $\mathbf{v} = -2\mathrm{e}^x + \sin x$ och $\mathbf{w} = \mathrm{e}^x + \sin x$. Skriv $\mathbf{w}$ som en linjärkombination av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

5. Linjen L går genom punkterna $(2, -3)$ och $(-4, 1)$. Ange L:s ekvation på normalform. Ange också, på parameterform, den normal N till L som går genom $(2, -3)$.

6. Ange, på normalform, en ekvation till planet Π som innehåller punkterna $(2, 1, 1)$, $(-3, 2, -1)$ och $(1, 4, -1)$.

7. Bestäm avståndet mellan linjen L: $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\quad t \in \mathbb{R}$ och punkten $P = (1, 2, 3)$.

8. Bestäm punktens $P = (1, 2, 1)$ spegelbild i planet Π: $x - y + 2z = 3$.

9. Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara två icke-parallella vektorer i $\mathbb{R}^3$. Bestäm

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \bullet \mathbf{u}, \quad (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \bullet \mathbf{v} \quad \text{och} \quad \mathbf{u} \times \mathbf{u}.$$

10. Betrakta underrummet $\mathbb{U} = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon \begin{array}{r} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{array} \right\}$.
Avgör vilken/vilka av vektorerna nedan som tillhör $\mathbb{U}$:

$$\mathbf{v}_1 = (0, 2, 0, 1), \quad \mathbf{v}_2 = (2, 1, -3, 1) \quad \text{och} \quad \mathbf{v}_3 = (-1, 2, 2, 1).$$

11. Beräkna $\begin{vmatrix} -1 & 2e & 0 & 1 \\ 3 & \sqrt{7} & \pi & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix}$.

12. Låt $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$ och $\mathbf{u} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$. Bestäm vektorer $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ där $\mathbf{u}_1$ är parallell med $\mathbf{v}$ och $\mathbf{u}_2$ är vinkelrät (ortogonal) mot $\mathbf{v}$ och så att $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$.

13. Lös matrisekvationen $\quad XB^{-1} + I = C \quad$ där I är enhetsmatrisen av storlek 2×2,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

14. Bestäm inversen till $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -3 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$.

15. Betrakta de tre planen

$$x + 2y + az = 1, \quad -x + 2z = b, \quad x + ay + 2z = 1.$$

För vilka värden på $a, b \in \mathbb{R}$ har de tre planen (i) exakt en skärningspunkt, (ii) ingen skärningspunkt, (iii) oändligt många skärningspunkter.

16. Betrakta underrummet

$$\mathbb{U} = [(1, -1, -1, 0), (1, 1, 1, 1), (3, 2, 1, 1), (-2, 1, 0, -2), (3, 1, -1, -1)] \subset \mathbb{R}^4.$$

Beskriv $\mathbb{U}$ med så få som möjligt av de generarande vektorerna ovan. Uttryck sedan, om möjligt, vektorerna $\mathbf{v} = (2, 3, 2, 1)$ respektive $\mathbf{w} = (4, 3, 2, 1)$ som linjärkombinationer av dem du fick kvar.

Lösningsförslag till TATA31. Linjär algebra, 2020–11–01

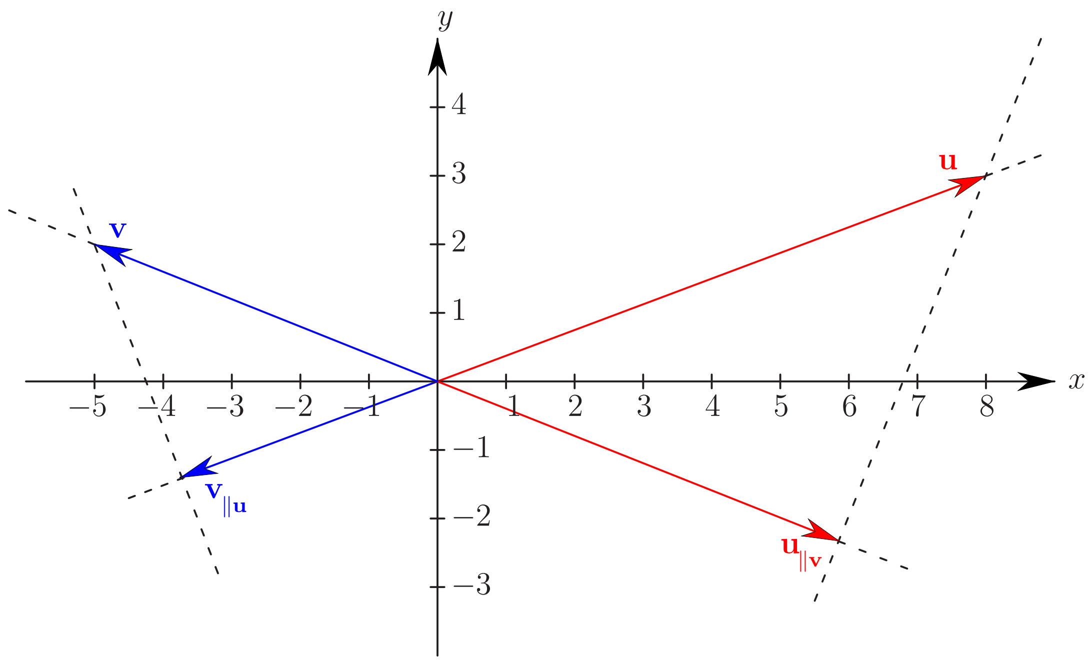
1. $\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

   $r, s, t \in \mathbb{R}$

2. AA och AB är inte definierade

$$A^tB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad AA^t + B = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

3.



4. $\mathbf{w} = \frac{3}{5}\mathbf{u} - \frac{1}{5}\mathbf{v}$

5. L: $2x + 3y = -5$, $\quad N$: $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\quad t \in \mathbb{R}$

6. Π: $-2x + 4y + 7z = 7$

7. $\frac{4}{5}\sqrt{30} = \sqrt{\frac{96}{5}}$

8. $\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)$

9. $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})\bullet\mathbf{u} = (\mathbf{u} \times \mathbf{v})\bullet\mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

10. $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2 \in \mathbb{U}$

11. 10eπ

12. $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_{\parallel \mathbf{v}} = -\frac{4}{9}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_{\perp \mathbf{v}} = \frac{1}{9}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 22 \\ 1 \\ -10 \end{pmatrix}$

13. $X = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

14. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

15. Planens skärningspunkter är de vars koordinater uppfyller alla tre ekvationerna, d v s lösningarna till ekvationsystemet

$$\begin{cases} x + 2y + az = 1 \\ -x \quad + \quad 2z = b \\ x + ay + 2z = 1 \end{cases} \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 1 \\ -1 & 0 & 2 & b \\ 1 & a & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Beräkna determinanten av koefficientmatrisen och använd sedan determinantkriteriet (Korollarium 4.7.2, sid 93). Vi får

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} \overset{k_3+2k_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & a+2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}(-1)\begin{vmatrix} 2 & a+2 \\ a & 4 \end{vmatrix} = 8 - a(a+2) =$$
$$= -(a^2 + 2a - 8) = 0 \iff a = -1 \pm \sqrt{1+8} = -4, 2.$$

Determinantkriteriet ger då att ekvationssystemet har entydig lösning, d v s planen har exakt en skärningspunkt då $a \neq -4$ och $a \neq 2$. Fallen $a = -4$ respektive 2 kontrolleras separat.

$$\underline{\underline{a = -4}}: \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & b \\ 1 & -4 & 2 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2+r_1 \\ r_3-r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1+b \\ 0 & -6 & 6 & 0 \end{array}\right) \overset{r_3+3r_2}{\sim}$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1+b \\ 0 & 0 & 0 & 3+3b \end{array}\right).$$

Följaktligen, lösning saknas om $3 + 3b \neq 0 \iff b = -1$ och vi har oändligt många lösningar för $b = -1$.

$$\underline{\underline{a = 2}}: \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & b \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2+r_1 \\ r_3-r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1+b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Följaktligen har vi oändligt många lösningar för alla värden på $b \in \mathbb{R}$.

Sammanfattningsvis

(i) exakt en skärningspunkt då $a \neq -4$ och 2,

(ii) ingen skärningspunkt då $a = -4$ och $b \neq -1$,

(iii) oändligt många skärningspunkter då $a = -4$ och $b = -1$ eller $a = 2$, $b \in \mathbb{R}$.

16. Vi ställer upp beroendeekvationen för de genererande vektorerna. Vi ställer också upp ekvationen "L.K.=godtycklig vektor" för att enklare kunna avgöra om $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ tillhör $\mathbb{U}$ eller inte. Kalla de genererande vektorerna $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_5$.

$$\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \lambda_3\mathbf{u}_3 + \lambda_4\mathbf{u}_4 + \lambda_5\mathbf{u}_5 =$$

$$= \lambda_1 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_5 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{pmatrix} = \mathbf{0} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 0 & x_1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & x_2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & x_3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & 0 & x_4 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2+r_1 \\ r_3+r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 0 & x_1 \\ 0 & 2 & 5 & -1 & 4 & 0 & x_1+x_2 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 2 & 0 & x_1+x_3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & 0 & x_4 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2-2r_4 \\ r_3-2r_4 \\ r_2\leftrightarrow r_4}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 6 & 0 & x_1+x_2-2x_4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & 0 & x_1+x_3-2x_4 \end{array}\right) \overset{3r_4}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 6 & 0 & x_1+x_2-2x_4 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 12 & 0 & 3x_1+3x_3-6x_4 \end{array}\right) \sim$$

$$\overset{r_4-2r_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 6 & 0 & x_1+x_2-2x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1-2x_2+3x_3-2x_4 \end{array}\right).$$

Vi börjar med beroendeekvationen.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_2 - 3\lambda_3 + 2\lambda_4 - 3\lambda_5 = 2s \\ -\lambda_3 + 2\lambda_4 + \lambda_5 = 3s + 3t \\ (-3\lambda_4 - 6\lambda_5)/3 = -s - 2t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

$\underline{\underline{s = 1, t = 0}}$: $\quad 2\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4 = \mathbf{0} \iff \mathbf{u}_4 = -2\mathbf{u}_1 - 3\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$,

$\underline{\underline{s = 0, t = 1}}$: $\quad 3\mathbf{u}_2 - 2\mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_5 = \mathbf{0} \iff \mathbf{u}_5 = -3\mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3$.

Med hänvisning till ovanstående ger satsen om löjliga element (Sats 5.3.16, sid 111) att $\mathbf{u}_4$ och $\mathbf{u}_5$ kan strykas i beskrivningen av $\mathbb{U}$ utan att det påverkar, d v s

$$\mathbb{U} = [(1,-1,-1,0),(1,1,1,1),(3,2,1,1)].$$

Ekvationen "L.K.=godtycklig vektor" är lösbar omm $x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0$. Detta ger att en vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ är linjärkombination av $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_5$, d v s tillhör $\mathbb{U}$ endast omm $x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0$. Detta ger att vi får en beskrivning av $\mathbb{U}$ också som lösningsrum,

$$\begin{aligned} \mathbb{U} &= [(1,-1,-1,0),(1,1,1,1),(3,2,1,1)] = \\ &= \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0\right\}. \end{aligned}$$

Insättning av koordinaterna för $\mathbf{v}$ respektive $\mathbf{w}$ ger att

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (2,3,2,1), \quad 2 - 2\cdot 3 + 3\cdot 2 - 2\cdot 1 = 0, \\ \mathbf{w} &= (4,3,2,1), \quad 4 - 2\cdot 3 + 3\cdot 2 - 2\cdot 1 = 2, \end{aligned}$$

d v s $\mathbf{v} \in \mathbb{U}$ men $\mathbf{w} \notin \mathbb{U}$. Återstår att uttrycka $\mathbf{v}$ med $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$, d v s börja om från början med $\mathbf{v}$ i högerledet men utan $\mathbf{u}_4$ och $\mathbf{u}_5$ i linjärkombinationen. Vi kommer dock göra om exakt samma operationer. Vi får

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_2 \mathbf{u}_3 = \mathbf{v}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2+r_1 \\ r_3+r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2-2r_4 \\ r_3-2r_4 \\ r_2 \leftrightarrow r_4}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \overset{\substack{3r_4-2r_3 \\ r_3/3}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \iff \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{d v s}$$

$$\mathbf{v} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3 = -\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$