Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Ulf Janfalk

Utbildningskod: TATA31
Modul: TEN1

Tentamen i Linjär algebra (TATA31/TEN1) 2021–08–20, 14–19.

Inga hjälpmedel, förutom passare, linjal eller gradskiva. OBS! Inga formler eller liknande tryckta på linjal eller gradskiva. Ej räknedosa.
För godkänt räcker 9 poäng och minst 3 uppgifter med 2 eller 3 poäng. Godkänd kontrollskrivning ($\geq$ 11p) ht2020 ger 3 poäng på uppgift 1 (som alltså inte behöver lösas) och 16p eller mer ger 4 poäng på uppgift 1. Markera detta genom att skriva ”G” respektive ”G+1” i rutan för uppgift 1.
Fullständiga motiveringar krävs. Lösningar läggs ut måndag 23/8 på

http://courses.mai.liu.se/GU/TATA31/tentor.html

Resultat meddelas via e-post inom 10 arbetsdagar.
Alla koordinater för vektorer och punkter är, om ej annat anges, givna med avseende på ett positivt orienterat ON-system, $\mathbb{R}^n$ är ett euklidiskt rum med standardskalärprodukten och standardbasen ett positivt orienterat ON-system.

1. (a) Vilken punkt på linjen L: $x + 2y = 4$ ligger närmast punkten $P = (-4, -1)$?

   (b) Bestäm en högerorienterad ON-bas, $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ för rummet ($\mathbb{R}^3$) där $\mathbf{f}_1$ är parallell med normalen till planet Π: $2x - y + z = 0$.

   (c) Antag att $\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = 7,\quad \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} = 5$ och $\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} = -3.$

   Beräkna $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ d & e & f \end{vmatrix}$.

2. Låt $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5$ vara en linjär avbildning med matris

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

i standardbaserna i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^5$ och låt $F^*\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som har A^t som avbildningsmatris i standardbaserna för $\mathbb{R}^5$ och $\mathbb{R}^2$. Konditionstalet $\kappa(F)$ till en linjär avbildning $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definieras som

$$\kappa(F) = \sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}}$$

där λ_{max}, λ_{min} är det största respektive det minsta egenvärdet till $F^* \circ F$.

   (a) Beräkna $\kappa(F)$ till den ovan givna avbildningen.

   (b) Antag att $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är en *isometrisk* avbildning. Visa att $\kappa(F) = 1$.

3. Låt $F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ vara en linjär avbildning som i standardbaserna för $\mathbb{R}^4$ och $\mathbb{R}^2$ har avbildningsmatrisen
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$
och låt $G\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ vara ortogonalprojektion på F:s nollrum. Bestäm G:s matris B i standardbasen.

4. Avbildningen $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har matrisen
$$A_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$
i standardbasen. Visa att $\mathbf{f}_1 = F(\mathbf{e}_1)$, $\mathbf{f}_2 = F(\mathbf{e}_2)$, $\mathbf{f}_3 = F(\mathbf{e}_3)$ är en bas för $\mathbb{R}^3$ och ange koordinaterna för $\mathbf{u} = (2, -1, 0)$ i basen $\underline{\mathbf{f}}$.

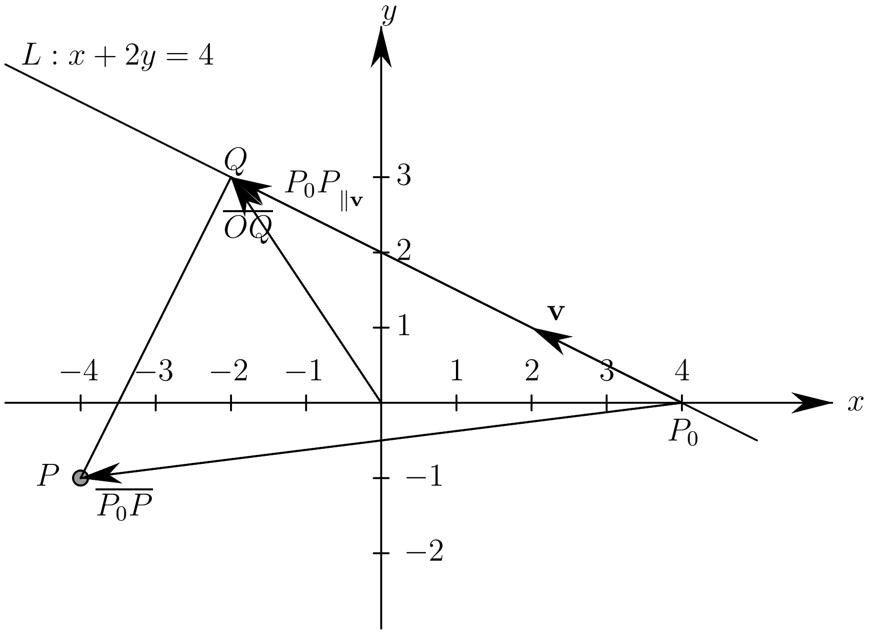
5. Betrakta underrummet $\mathbb{U} = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4] \subset \mathbb{P}_3$ där
$$\mathbf{p}_1 = -1 + x + x^2, \qquad \mathbf{p}_2 = -5 + 4x + 3x^3,$$
$$\mathbf{p}_3 = 4 - 3x + x^2 - 3x^3, \qquad \mathbf{p}_4 = -3 + 2x - 2x^2 + 3x^3$$
Bestäm en bas i $\mathbb{U}$ och ange $\mathbb{U}$:s dimension. Fyll ut basen i $\mathbb{U}$ till en bas i $\mathbb{P}_3$. Låt
$$\mathbf{q}_1 = 1 + x, \quad \mathbf{q}_2 = -2 + x - 3x^2 + 3x^3, \quad \mathbf{q}_3 = 2 - x + 3x^2 - x^3.$$
Avgör vilken/vilka av $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ som tillhör $\mathbb{U}$.

6. Vilken sorts yta definieras av ekvationen
$$x_1^2 - 4x_1x_2 - 10x_1x_3 + x_2^2 - 10x_2x_3 + 4x_3^2 = 4?$$
Rita en principskiss av hur en sådan yta ser ut (behöver ej vara skalenlig). Vilka punkter på ytan ligger närmast origo och på vilket avstånd ligger de?

7. Låt $F\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ vara en linjär avbildning sådan att $F \circ F = F$. Visa att F inte kan ha andra egenvärden än 0 och 1 samt att F är diagonaliserbar. **Tips:** Visa att $V(F)$ är egenrum till 1.

Lösningsförslag till TATA31, Linjär algebra, 2021–08–20, 14–19.

1. (a) Då vi söker närmsta punkt är det enklare att jobba med linjen på parameterform. betrakta nedanstående figur:



Då L har ekvationen $x + 2y = 4$ på *normalform* är normalen $\mathbf{n} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ så att en riktningsvektor för L är, t ex $\mathbf{v} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ och $P_0 = (4, 0)$ är en punkt på L. Då fås

$$\overline{P_0P} = \overline{OP} - \overline{OP}_0 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-8\\-1\end{pmatrix},$$

$$\overline{P_0P}_{\parallel \mathbf{v}} = \frac{\overline{P_0P}\bullet\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} = \frac{1}{5}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-8\\-1\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} = \frac{15}{5}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix},$$

$$\overline{OQ} = \overline{OP}_0 + \overline{P_0P}_{\parallel \mathbf{v}} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$$

så $Q = (-2, 3)$.

(b) Då planets normal är $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ väljer vi $\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$. Som $\mathbf{f}_2$ väljer vi vilken som helst enhetsvektor ortogonal mot $\mathbf{f}_1$, t ex $\mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$. Slutligen väljer vi

$$\mathbf{f}_3 = \mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\times\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$
$$\begin{matrix}2 & & 1\\ -1 & & 1\end{matrix}$$

då definitionen av kryssprodukten garanterar att $\mathbf{f}_3$ är ortogonal mot $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$ samt att $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ är ett högersystem, d v s $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ är en högerorienterad ON-bas.

(c) Kofaktorutveckling efter rad 2 ger

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ d & e & f \end{vmatrix} = 1{\cdot}(-1)^{2+1}\underbrace{\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}}_{=-3} + 2{\cdot}(-1)^{2+2}\underbrace{\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}_{=5} + 3{\cdot}(-1)^{2+3}\underbrace{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}_{=7} =$$
$$= -(-3) + 2{\cdot}5 - 3{\cdot}7 = 13 - 21 = -8.$$

2. (a) Enligt **Sats 7.6.2**, sid 186 har $F^*{\circ}F$ avbildningsmatrisen A^tA. Beräkna denna och dess egenvärden.

$$A^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 16 \end{pmatrix},$$

$$\det(A^tA-\lambda I) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & 3 \\ 3 & 16-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)(16-\lambda)-9 = \lambda^2-24\lambda+119=0 \iff$$

$$\iff \lambda = 12 \pm \sqrt{144-119} = 12 \pm 5 = 17, 7 \Longrightarrow \kappa(F) = \sqrt{\frac{17}{7}}.$$

(b) Om F är isometrisk så är dess avbildningsmatris A i en ON-bas en ON-matris enligt **Sats 7.7.2**, sid 191. Därmed gäller att $A^t = A^{-1}$ enligt **Definition 6.3.22**, sid 156 vilket i sin tur innebär att $A^tA = I$. Då alla egenvärden till I är 1 följer påståendet.

3. Beräkna $N(F)$ på vanligt sätt genom att lösa ekvationen $AX = \mathit{0}$. Vi får

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{r_2-2r_1}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2/5 \\ r_1+2r_2}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X = \begin{pmatrix} s \\ t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow N(F) = [(1,0,1,0), (0,1,0,1)].$$

För att kunna beräkna ortogonalprojektionen på $N(F)$ behöver vi en ON-bas i $N(F)$. Då vektorerna som genererar $N(F)$ är ortogonala mot varann räcker det att normera dem för att skapa en ON-bas. Följaktligen,

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

är en ON-bas i $N(F)$. Då fås

$$G(\mathbf{u}) = (\mathbf{u}{\bullet}\mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1 + (\mathbf{u}{\bullet}\mathbf{f}_2)\,\mathbf{f}_2$$

och vi kan beräkna G:s matris B genom att beräkna vad G gör med standardbasvektorerna. Vi får

$$
\begin{aligned}
G(\mathbf{e}_1) &= (\mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1 + (\mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{f}_2)\,\mathbf{f}_2 = \\
&= \frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \\
G(\mathbf{e}_2) &= (\mathbf{e}_2 \bullet \mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1 + (\mathbf{e}_2 \bullet \mathbf{f}_2)\,\mathbf{f}_2 = \\
&= \frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

$$
G(\mathbf{e}_3) = G(\mathbf{e}_1) = \frac{1}{2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad G(\mathbf{e}_4) = G(\mathbf{e}_2) = \frac{1}{2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \Longrightarrow
$$

$$
\Longrightarrow B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 1\\1 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}
$$

4. Koordinaterna för $F(\mathbf{e}_1)$ är första kolonnen i $A_{\underline{\mathbf{e}}}$ etc. Koordinaterna för $\mathbf{u}$ i basen $\underline{\mathbf{f}}$ är konstanterna i den linjärkombination av $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ som blir $\mathbf{u}$. Vi löser därför hela problemet genom att studera beroendeekvationen och "L.K. $= \mathbf{u}$", d v s

$$
\lambda_1 \mathbf{f}_1 + \lambda_2 \mathbf{f}_2 + \lambda_3 \mathbf{f}_3 = \mathbf{0} \text{ resp } \mathbf{u}.
$$

Då fås ekvationssystemen

$$
\left(\begin{array}{ccc|cc}1 & 1 & 1 & 0 & 2\\1 & 2 & -1 & 0 & -1\\1 & 3 & 1 & 0 & 0\end{array}\right) \overset{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|cc}1 & 1 & 1 & 0 & 2\\0 & 1 & -2 & 0 & -3\\0 & 2 & 0 & 0 & -2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc}1 & 1 & 1 & 0 & 2\\0 & 1 & 0 & 0 & -1\\0 & 1 & -2 & 0 & -3\end{array}\right) \sim
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|cc}1 & 1 & 1 & 0 & 2\\0 & 1 & 0 & 0 & -1\\0 & 0 & -2 & 0 & -2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc}1 & 1 & 1 & 0 & 2\\0 & 1 & 0 & 0 & -1\\0 & 0 & 1 & 0 & 1\end{array}\right) \overset{\substack{r_1-r_3\\r_1-r_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|cc}1 & 0 & 0 & 0 & 2\\0 & 1 & 0 & 0 & -1\\0 & 0 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)
$$

varur det följer att $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ är linjärt oberoende och därmed en bas enligt satsen om rätt antal element samt att $\mathbf{u} = 2\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 = \underline{\mathbf{f}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. Ställ upp beroendeekvationen och "L.K. = godtyckligt polynom", d v s

$$\lambda_1\mathbf{p}_1 + \lambda_2\mathbf{p}_2 + \lambda_3\mathbf{p}_3 + \lambda_4\mathbf{p}_4 = \mathbf{0}, \quad a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3.$$

Då fås ekvationssystemen

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} -1 & -5 & 4 & -3 & 0 & a_0 \\ 1 & 4 & -3 & 2 & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 0 & a_2 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & 0 & a_3 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2+r_1 \\ r_3+r_1 \\ -r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 5 & -4 & 3 & 0 & -a_0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & a_0+a_1 \\ 0 & -5 & 5 & -5 & 0 & a_0+a_2 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & 0 & a_3 \end{array}\right) \overset{\substack{r_3-5r_2 \\ r_4+3r_2 \\ -r_2}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 5 & -4 & 3 & 0 & -a_0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -a_0-a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4a_0-5a_1+a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3a_0+3a_1+a_3 \end{array}\right) \overset{r_1-5r_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 4a_0+5a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -a_0-a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4a_0-5a_1+a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3a_0+3a_1+a_3 \end{array}\right).$$

Vi börjar med beroendeekvationen.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_3 + 2\lambda_4 = -s + 2t \\ \lambda_3 - \lambda_4 = s - t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Insättning av lösningen för $s = 1, t = 0$ respektive $s = 0, t = 1$ i beroendeekvationen ger

$$\begin{array}{llcl} \underline{\underline{s=1, t=0}}: & -\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 = \mathbf{0} & \iff & \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3, \\ \underline{\underline{s=0, t=1}}: & 2\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_4 = \mathbf{0} & \iff & -2\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_4, \end{array}$$

d v s $\mathbf{p}_3$ och $\mathbf{p}_4$ kan utses till löjliga element. Satsen om löjliga element, **Sats 5.3.16**, sid 111 ger då att

$$\mathbb{U} = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4] = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2]$$

och då $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ är linjärt oberoende så är de en bas och $\dim \mathbb{U} = 2$.
Ur ovanstående kalkyl följer att ekvationen "L.K. = godtyckligt polynom" är lösbar d v s ett polynom $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ är en linjärkombination av $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4$ omm

$$\begin{cases} -4a_0 - 5a_1 + a_2 = 0 \\ 3a_0 + 3a_1 + a_3 = 0 \end{cases}$$

vilket innebär att

$$\mathbb{U} = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2] = \left\{ a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{P}_3 \colon \begin{array}{l} -4a_0 - 5a_1 + a_2 = 0 \\ 3a_0 + 3a_1 + a_3 = 0 \end{array} \right\}.$$

Då $\dim \mathbb{U} = 2$ och $\dim \mathbb{P}_3 = 4$ behöver vi fylla ut med två nya polynom. Som första utfyllnad väljer vi, t ex $\mathbf{p}_5 = 1 - 3x^3$ som bryter mot första ekvationen men uppfyller

den andra. Därmed gäller att $\mathbf{p}_5 \notin \mathbb{U}$ och Plus-satsen, **Sats 5.4.21**, sid 123 ger då att $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_5$ är linjärt oberoende. Då alla tre satisfierar den sista ekvationen blir denna också ekvation för $[\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_5]$. Som sista utfyllnad väljer vi ett polynom som bryter mot denna ekvation, t ex $\mathbf{p}_6 = 1 \notin [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_5]$. Plus-satsen ger då att $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_5, \mathbf{p}_6$ är linjärt oberoende och därmed en bas i $\mathbb{P}_3$ enligt satsen om rätt antal element, **Sats 5.4.19**, sid 121.
För att avgöra vilka av $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ som ligger i $\mathbb{U}$ sätter vi in deras respektive koefficienter i ekvationerna. Båda måste vara uppfyllda för att polynomet skall tillhöra $\mathbb{U}$. Vi får

	$-4a_0 - 5a_1 + a_2$	$3a + 3a_1 + a_3$
$\mathbf{q}_1 = 1 + x$	-9	6
$\mathbf{q}_2 = -2 + x - 3x^2 + 3x^3$	0	0
$\mathbf{q}_3 = 2 - x + 3x^2 - x^3$	0	2

,

d v s endast $\mathbf{q}_2 \in \mathbb{U}$.

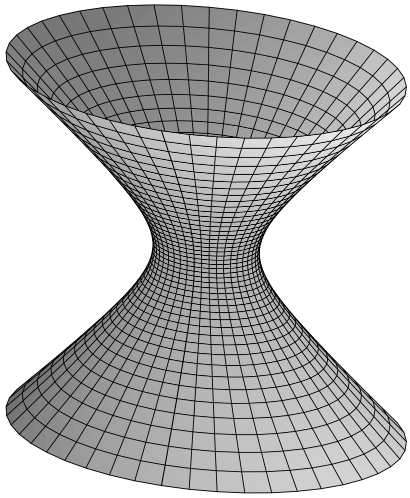
6. Sätt Q till vänsterledet i ekvationen, skriv Q på matrisform, beräkna egenvärdena och de egenvektorer som behövs.

$$
\begin{aligned}
Q(\mathbf{u}) &= Q(\underline{\mathbf{e}}\,X) = x_1^2 - 4x_1x_2 - 10x_1x_3 + x_2^2 - 10x_2x_3 + 4x_3^2 = \\
&= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -2 & 1 & -5 \\ -5 & -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = X^tAX, \\
\det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -5 \\ -2 & 1-\lambda & -5 \\ -5 & -5 & 4-\lambda \end{vmatrix} \overset{r_2-r_1}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -5 \\ \lambda-3 & 3-\lambda & 0 \\ -5 & -5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= (\lambda - 3) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -5 \\ 1 & -1 & 0 \\ -5 & -5 & 4-\lambda \end{vmatrix} \overset{k_1+k_2}{=} (\lambda - 3) \begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ -10 & -5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= -(\lambda - 3) \begin{vmatrix} -1-\lambda & -5 \\ -10 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)((-1 - \lambda)(4 - \lambda) - 50) = \\
&= (3 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 54) = (3 - \lambda)(\lambda - 9)(\lambda + 6) = 0 \iff \\
\iff \lambda &= -6, 3, 9.
\end{aligned}
$$

Detta innebär att i en ON-bas av egenvektorer, $\underline{\mathbf{f}}$ kan Q skrivas

$$
Q(\mathbf{u}) = Q(\underline{\mathbf{f}}\,X_{\mathbf{f}}) = -6y_1^2 + 3y_2^2 + 9y_3^2 = 4
$$

vilket är ekvationen för en *enmantlad hyperboloid*. Nedanstående figur återfinns i boken, sid 233.



I denna figur går y_1-axeln genom "hålet" i ytan. Återstår att avgöra vilka punkter som ligger närmast och vilket avstånd de har till origo. Enligt **Sats 9.1.11**, sid 227 gäller

$$\lambda_{\min}|\mathbf{u}|^2 = -6\,|\mathbf{u}|^2 \le Q(\mathbf{u}) \le \lambda_{\max}|\mathbf{u}|^2 = 9\,|\mathbf{u}|^2$$

med likhet i respektive olikhet om $\mathbf{u}$ är en egenvektor till motsvarande egenvärde. Då vi här studerar endast sådana $\mathbf{u}$ för vilka $Q(\mathbf{u}) = 4$ är den vänstra olikheten innehållslös och den högra blir

$$Q(\mathbf{u}) = 4 \le 9\,|\mathbf{u}|^2 \iff |\mathbf{u}|^2 \ge \frac{4}{9} \iff |\mathbf{u}| \ge \frac{2}{3}$$

med likhet då $\mathbf{u}$ är en egenvektor till 9 av längd 2/3. Bestäm egenvektorn till 9.

$$\underline{\underline{\lambda = 9}}: \begin{pmatrix} -8 & -2 & -5 & 0 \\ -2 & -8 & -5 & 0 \\ -5 & -5 & -5 & 0 \end{pmatrix} \underset{r_1 \leftrightarrow r_3}{\overset{-r_3/5}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -8 & -5 & 0 \\ -8 & -2 & -5 & 0 \end{pmatrix} \underset{r_3+8r_1}{\overset{r_2+2r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix} \underset{-r_2/3}{\overset{r_3+r_2}{\sim}}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow X_9 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Därmed, eftersom vi presenterade ekvationen för ytan i ON-basen av egenvektorer som ovan, väljer vi $\mathbf{f}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$. De punkter $P_\pm$ som ligger närmast har då ortsvektorer

$$\overline{OP}_\pm = \pm\frac{2}{3}\mathbf{f}_3 = \pm\frac{2}{3\sqrt{6}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \pm\frac{\sqrt{6}}{9}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \iff P_\pm = \left(\frac{\sqrt{6}}{9}, \frac{\sqrt{6}}{9}, -\frac{2\sqrt{6}}{9}\right)$$

är de punkter på ytan som ligger närmast origo och avståndet till origo är 2/3.

7. Antag att $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ är en egenvektor med egenvärde λ till F. Då är $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ och $F(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$. Eftersom $F{\circ}F = F$ och F är linjär gäller

$$F{\circ}F(\mathbf{v}) = \begin{cases} F(F(\mathbf{v})) = F(\lambda\mathbf{v}) = \lambda F(\mathbf{v}) = \lambda(\lambda\mathbf{v}) = \lambda^2\mathbf{v} \\ \hfill F(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v} \end{cases} \iff \lambda^2 = \lambda \iff$$

$$\iff \lambda = 0 \text{ eller } 1.$$

Vi skall nu visa att $V(F) =$ egenrummet till 1. Antag att $\mathbf{u}$ är en egenvektor till 1, d v s att $F(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$. Detta innebär att $\mathbf{u} \in V(F)$ så att

$$\text{egenrummet till } 1 \subset V(F),$$

d v s egenrummet till 1 är ett underrum av $V(F)$. Omvänt, om $\mathbf{u} \in V(F)$ så finns ett $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ så att $\mathbf{u} = F(\mathbf{v})$. Då $F \circ F = F$ fås

$$\mathbf{u} = F(\mathbf{v}) = F \circ F(\mathbf{v}) = F(\underbrace{F(\mathbf{v})}_{=\mathbf{u}}) = F(\mathbf{u}),$$

d v s $\mathbf{u}$ är en egenvektor med egenvärde 1. Följaktligen är $V(F) \subset$ egenrummet till 1. Därmed har vi visat att

$$\text{egenrummet till } 1 = V(F).$$

Då $N(F)$ består av de $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ sådana att $F(\mathbf{v}) = \mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{v}$ följer det att

$$N(F) = \text{egenrummet till } 0.$$

För att visa att F är diagonaliserbar måste vi visa att vi har en bas av egenvektorer. De enda egenvektorer vi har är vektorerna i $N(F)$ och $V(F)$. Betrakta en bas ur $N(F)$ och en bas ur $V(F)$. Enligt dimensionssatsen (**Sats 7.5.6**, sid 182) har vi

$$\dim N(F) + \dim V(F) = \dim \mathbb{V}$$

så tillsammans har de "rätt antal". Det är också klart att $N(F) \cap V(F) = \mathbf{0}$ då en vektor inte kan vara egenvektor till två olika egenvärden. Därmed är de linjärt oberoende enligt multi-plussatsen (**Sats 5.4.26**, sid 126). Enligt satsen om rätt antal element (**Sats 5.4.19**, sid 121) är de en bas i $\mathbb{V}$ och därmed också en bas av egenvektorer, d v s F är diagonaliserbar.