Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Ulf Janfalk

Utbildningskod: TATA31
Modul: TEN1

Tentamen i Linjär algebra (TATA31/TEN1) 2021–01–09, 14–19.

Inga hjälpmedel, förutom passare, linjal eller gradskiva. OBS! Inga formler eller liknande tryckta på linjal eller gradskiva. Ej räknedosa.
För godkänt räcker 9 poäng och minst 3 uppgifter med 2 eller 3 poäng. Godkänd kontrollskrivning ($\geq$ 11p) ht2019 ger 3 poäng på uppgift 1 (som alltså inte behöver lösas) och 16p eller mer ger 4 poäng på uppgift 1. Markera detta genom att skriva ”G” respektive ”G+1” i rutan för uppgift 1.
Fullständiga motiveringar krävs. Lösningar läggs ut måndag 11/1 på

http://courses.mai.liu.se/GU/TATA31/tentor.html

Resultat meddelas via e-post inom 10 arbetsdagar.
Alla koordinater för vektorer och punkter är, om ej annat anges, givna med avseende på ett positivt orienterat ON-system, $\mathbb{R}^n$ är ett euklidiskt rum med standardskalärprodukten och standardbasen ett positivt orienterat ON-system.

(3 p) 1. Låt $P = (3, 0, 0)$ och låt L vara skärningslinjen mellan planen

$$\Pi_1: \quad x + y + 3z = 4, \qquad \Pi_2: \quad y + 2z = 1$$

Bestäm avståndet mellan P och L. Bestäm också det plan som är ortogonalt mot L och som går genom P.

(3 p) 2. Bestäm den lösning till systemet av differensekvationer

$$\begin{cases} a_n = 7a_{n-1} + 10b_{n-1} \\ b_n = -5a_{n-1} - 8b_{n-1} \end{cases}$$

för vilken gäller att $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{3^n}$ existerar och $a_0 = 6$.

(3 p) 3. Ange en ON-bas i underrummet

$$\mathbb{U} = [(1, 0, 1, 0, 1), (0, 1, 0, 1, 0)] \subset \mathbb{R}^5$$

och fyll sedan ut den till en ON-bas i $\mathbb{R}^5$. Ange koordinaterna för $\mathbf{u} = (-1, -1, 1, 1, 0)$ i den bas du valt.

(3 p) 4. Låt $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Bestäm en ON-bas av egenvektorer till den kvadratiska formen

$$Q(\mathbf{u}) = -2x_1^2 + 4x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 14x_1x_3 - 2x_2x_3$$

och ange uttrycket för Q i den bas du valt. Bestäm även största respektive minsta värde då $|\mathbf{u}| = 2$ samt i vilka punkter dessa extremvärden antas.

VÄND!

(3 p) 5. Låt $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara en linjär avbildning sådan att

$$F\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}\right)=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad F\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix}\right)=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad F\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}\right)=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

(2 p) (a) Bestäm F:s matris i standardbasen, $\underline{\mathbf{e}}$.

(1 p) (b) Verifiera att din matris är korrekt genom att använda den till att beräkna

$$F\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}\right),\quad F\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix}\right),\quad F\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}\right).$$

(3 p) 6. Bestäm det polynom $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{P}_2$ som i minsta-kvadratmening bäst ansluter till nedanstående data:

$$\begin{array}{c|cccc} x & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 1 & -1 & -1 & 3 \end{array}.$$

(3 p) 7. Betrakta de linjära avbildningarna $F, G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ där

$$\begin{aligned} F(\mathbf{u}) &= \text{ ortogonalprojektionen av } \mathbf{u} \text{ i planet } 2x + 7y + z = 0,\\ G(\mathbf{u}) &= \text{ ortogonalprojektionen av } \mathbf{u} \text{ i planet } 3x - y + z = 0. \end{aligned}$$

Bevisa att $F \circ G$ är symmetrisk. Bestäm därefter baser i och dimensionen av $N(F \circ G)$ respektive $V(F \circ G)$.

Lösningsförslag till TATA31, Linjär algebra, 2021–01–09, em

1. Vi börjar med att ta fram L:s parameterform genom att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + 3z = 4 \\ \quad\;\; y + 2z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + \quad\;\; z = 3 \\ \quad\;\; y + 2z = 1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - z = 3 + t \\ 1 - 2z = 1 + 2t \\ -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$L\colon\ \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \overline{OP}_0 + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Därefter beräknar vi

$$\overline{P_0P} = \overline{OP} - \overline{OP}_0 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\overline{P_0P}_{\parallel \mathbf{v}} = \frac{\overline{P_0P}\bullet\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} = \frac{1}{6}\left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\,\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\overline{P_0P}_{\perp \mathbf{v}} = \overline{P_0P} - \overline{P_0P}_{\parallel \mathbf{v}} = \frac{1}{3}\left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\,\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{Sökt avstånd } = \left|\overline{P_0P}_{\parallel \mathbf{v}}\right| = \left|\frac{1}{3}\,\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

Det följer också att det sökta normalplanet $\Pi_{\perp L}$ till L som går genom P har $\mathbf{v}$ som normalvektor vilket ger

$$\begin{aligned} \Pi_{\perp L}\colon &\quad x + 2y - z = D, \\ P = (3,0,0) \in \Pi_{\perp L}\colon &\quad 3 + 2\cdot 0 - 0 = 3 = D, \end{aligned}$$

d v s det sökta planet har ekvationen $\quad x + 2y - z = 3$

2. Skriv på matrisform och bestäm egenvärden och egenvektorer.

$$X_n = \begin{pmatrix} a'_{n-1} \\ b'_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ -5 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = AX_{n-1},$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 10 \\ -5 & -8-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)(-8-\lambda) + 50 = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \iff$$

$$\iff \lambda = 2, -3,$$

$$\underline{\underline{\lambda = 2}}: \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 10 & 0 \\ -5 & -10 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow Y_2 = t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\underline{\underline{\lambda = -3}}: \left(\begin{array}{cc|c} 10 & 10 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow Y_{-3} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ur detta fås

$$X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = C_1 2^n \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2(-3)^n \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\frac{b_n}{3^n} = -C_1\left(\frac{2}{3}\right)^n + C_2\left(\frac{-3}{3}\right)^n = -C_1\left(\frac{2}{3}\right)^n + C_2\,(-1)^n\,.$$

Då $(-1)^n$ inte har gränsvärde då $n \to \infty$ följer det att $C_2 = 0$ för att $b_n/3^n$ skall ha gränsvärde då $n \to \infty$. Gränsvärdet blir då 0 eftersom $(2/3)^n \to 0$ då $n \to \infty$. Detta ger

$$a_n = 2C_1 2^n, \quad a_0 = 2C_1 = 6 \iff C_1 = 3 \Longrightarrow X_n = 2^n\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}.$$

3. Sätt $\mathbf{u}_1 = (1,0,1,0,1)$ och $\mathbf{u}_2 = (0,1,0,1,0)$. Då $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2$ räcker det att normera för att få en ON-bas i $\mathbb{U}$, d v s

$$\mathbf{f}_1 = \widehat{\mathbf{u}}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}_2 = \widehat{\mathbf{u}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},$$

Som utfyllnad utnyttjar vi det ortogonala komplementet

$$\mathbb{U}^\perp = \left\{\mathbf{v}\in\mathbb{R}^5\colon\ \begin{matrix}\mathbf{v}\perp\mathbf{u}_1 = (1,0,1,0,1),\\ \mathbf{v}\perp\mathbf{u}_2 = (0,1,0,1,0)\end{matrix}\right\} = \left\{\mathbf{v}\in\mathbb{R}^5\colon\ \begin{matrix}\mathbf{v}\bullet\mathbf{u}_1 = 0,\\ \mathbf{v}\bullet\mathbf{u}_2 = 0\end{matrix}\right\} =$$

$$= \left\{\mathbf{v} = (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\mathbb{R}^5\colon\ \begin{matrix}x_1 + x_3 + x_5 = 0\\ x_2 + x_4 = 0\end{matrix}\right\}$$

Parametrisering på vanligt sätt ger

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x_3 - x_5 = -r - t\\ -x_4 = -s\\ r\\ s\\ t\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad r,s,t\in\mathbb{R},$$

d v s $\mathbf{v}_3 = (-1,0,1,0,0)$, $\mathbf{v}_4 = (0,-1,0,1,0)$ och $\mathbf{v}_5 = (-1,0,0,0,1)$ är en bas i $\mathbb{U}^\perp$. Här observerar vi att $\mathbf{v}_3$ och $\mathbf{v}_5$ båda är ortogonala mot $\mathbf{v}_4$ och vi väljer $\mathbf{f}_3 = \widehat{\mathbf{v}}_3$, $\mathbf{f}_4 = \widehat{\mathbf{v}}_4$ och ortogonaliserar $\mathbf{v}_5$ m.h.a. Gram-Schmidt. Vi får

$$\mathbf{v}_{5_{\|[\mathbf{f}_3,\mathbf{f}_4]}} = (\mathbf{v}_5\bullet\mathbf{f}_3)\,\mathbf{f}_3 + (\mathbf{v}_5\bullet\mathbf{f}_4)\,\mathbf{f}_4 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v}_{5_{\perp[\mathbf{f}_3,\mathbf{f}_4]}} = \mathbf{v}_5 - \mathbf{v}_{5_{\|[\mathbf{f}_3,\mathbf{f}_4]}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2\\0\\0\\0\\2\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\\0\\2\end{pmatrix}.$$

Normering ger då att

$$\mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_3 = -\widehat{\mathbf{v}_{5_{\perp[\mathbf{f}_3,\mathbf{f}_4]}}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\-2\end{pmatrix}$$

är en ON-bas i $\mathbb{U}^{\perp}$. Då $\mathbb{U} \oplus \mathbb{U}^{\perp} = \mathbb{R}^5$ enligt **Korollarium 6.3.11**, sid 148 så är $\mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4, \mathbf{f}_5$ en ON-bas i $\mathbb{R}^5$. Slutligen observerar vi att

$$\mathbf{v} = (-1,-1,1,1,0) = \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 = \sqrt{2}\,\mathbf{f}_3 + \sqrt{2}\,\mathbf{f}_4 = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix}0\\0\\\sqrt{2}\\\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$$

vilket även går att räkna fram ur koordinatsambandet $X_{\underline{\mathbf{f}}} = T^{-1}X_{\underline{\mathbf{e}}}$. Väljer du en annan ON-bas i $\mathbb{U}^{\perp}$ får du andra 3:e, 4:e och 5:e koordinat. De inledande två 0:rna måste du dock få oavsett vilken ON-bas du valt eftersom $\mathbf{v} \in \mathbb{U}^{\perp}$

4. Skriv Q på (symmetrisk) matrisform och bestäm egenvärden och egenvektorer.

$$\begin{aligned}
Q(\mathbf{u}) &= Q(\underline{\mathbf{e}}\,X_{\underline{\mathbf{e}}}) = -2x_1^2 + 4x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 14x_1x_3 - 2x_2x_3 \\
&= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1 & -7\\ 1 & 4 & -1\\ -7 & -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = X_{\underline{\mathbf{e}}}^t A X_{\underline{\mathbf{e}}}, \\
\det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix}-2-\lambda & 1 & -7\\ 1 & 4-\lambda & -1\\ -7 & -1 & -2-\lambda\end{vmatrix} \overset{r_3+r_1}{=} \begin{vmatrix}-2-\lambda & 1 & -7\\ 1 & 4-\lambda & -1\\ -9-\lambda & 0 & -9-\lambda\end{vmatrix} \overset{k_1-k_3}{=} \\
&= (-9-\lambda)\begin{vmatrix}5-\lambda & 1 & -7\\ 2 & 4-\lambda & -1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = (-9-\lambda)((5-\lambda)(4-\lambda)-2) = \\
&= (-9-\lambda)\left(\lambda^2 - 9\lambda + 18\right) = 0 \iff \\
&\iff \lambda = -9, \quad \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{72}{4}} = \frac{9 \pm 3}{2} = 6, 3,
\end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\lambda = 3}}: \quad \left(\begin{array}{ccc|c}-5 & 1 & -7 & 0\\ 1 & 1 & -1 & 0\\ -7 & -1 & -5 & 0\end{array}\right) \overset{\substack{r_1+5r_2\\ r_3+7r_2\\ r_2\leftrightarrow r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 6 & -12 & 0\\ 0 & 6 & -12 & 0\end{array}\right) \overset{\substack{r_3-r_2\\ r_1+(-r_2/6)\\ r_2/6}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \Longrightarrow X_3 = t\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\underline{\underline{\lambda = 6}}: \quad \left(\begin{array}{ccc|c}-8 & 1 & -7 & 0\\ 1 & -2 & -1 & 0\\ -7 & -1 & -8 & 0\end{array}\right) \overset{\substack{r_1+8r_2\\ r_3+7r_2\\ r_2\leftrightarrow r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & -1 & 0\\ 0 & -15 & -15 & 0\\ 0 & -15 & -15 & 0\end{array}\right) \overset{\substack{r_3-r_2\\ r_1-(-2r_2/15)\\ -r_2/15}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_6 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\underline{\underline{\lambda = -9}}: \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 1 & -7 & 0 \\ 1 & 13 & -1 & 0 \\ -7 & -1 & 7 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_1-7r_2 \\ r_3+7r_2 \\ r_2 \leftrightarrow r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 13 & -1 & 0 \\ 0 & -90 & 0 & 0 \\ 0 & 90 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_3+r_2 \\ -r_2/90}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 13 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_{-9} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow Q(\underline{\mathbf{f}}\, X_{fb}) = 3y_1^2 + 6y_2^2 - 9y_3^2.$$

Enligt **Sats 9.1.11**, sid 227 gäller

$$\lambda_{min} |\mathbf{u}|^2 = -9 |\mathbf{u}|^2 \leq Q(\mathbf{u}) \leq 6 |\mathbf{u}|^2 = \lambda_{max} |\mathbf{u}|^2$$

med likhet i respektive olikhet då $\mathbf{u}$ är en egenvektor till motsvarande egenvärde. Följaktligen blir extremvärdena då $|\mathbf{u}| = 2$ för Q

$$\min_{|\mathbf{u}|=2} Q(\mathbf{u}) = -9 \cdot 2^2 = -36 = Q(\pm 2\mathbf{f}_3) = Q\left(\pm\left(\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\right)\right),$$

$$\max_{|\mathbf{u}|=2} Q(\mathbf{u}) = 6 \cdot 2^2 = 24 = Q(\pm 2\mathbf{f}_2) = Q\left(\pm\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{\sqrt{3}}\right)\right),$$

d v s minvärde -36 som antas i punkterna $P_{min} = \pm\left(\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\right)$ och maxvärde 24 som antas i punkterna $P_{max} = \pm\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{\sqrt{3}}\right)$

5. (a) Då de givna värdena är standardbasvektorerna $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ följer det att $V(F) = \mathbb{R}^3$. Därmed existerar F^{-1} och vi vet att matrisen till F^{-1} är A^{-1}, d v s inversen till den sökta matrisen A. Från förutsättningarna fås att

$$F^{-1}(\mathbf{e}_1) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad F^{-1}(\mathbf{e}_2) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad F^{-1}(\mathbf{e}_3) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

och vi kan beräkna A genom att beräkna $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2-3r_1 \\ r_3-2r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{3r_3-r_2 \\ -r_2}}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 18 & 12 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -1 & 3 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2-2r_3 \\ r_1-4r_3 \\ 2r_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 18 & 0 & 18 & 4 & -12 \\ 0 & 6 & 0 & 9 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & -6 & -2 & 6 \end{array}\right) \overset{r_1-3r_2}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & -9 & 1 & 6 \\ 0 & 6 & 0 & 9 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & -6 & -2 & 6 \end{array}\right) \Longrightarrow A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -9 & 1 & 6 \\ 9 & 1 & -6 \\ -6 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

(b) Vi räknar ut värdena genom att beräkna $A\cdot$respektive koordinatmatris.

$$F\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{6}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -9 & 1 & 6 \\ 9 & 1 & -6 \\ -6 & -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$F\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{6}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -9 & 1 & 6 \\ 9 & 1 & -6 \\ -6 & -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$F\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{6}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -9 & 1 & 6 \\ 9 & 1 & -6 \\ -6 & -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

6. Låt $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Med $y = p(x)$ och insättning av värdena i tabellen fås

$$p(-1) = a_0 - a_1 + a_2 = 1, \quad p(0) = a_0 = -1, \quad p(1) = a_0 + a_1 + a_2 = -1,$$
$$p(2) = a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 3.$$

Skriver vi detta på matrisform fås

$$\begin{pmatrix} p(-1) \\ p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = AX = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = Y.$$

Vi får

$$A^tA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{pmatrix},$$

$$A^tY = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Normalekvationerna blir då

$$A^tAX = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} A^tY \iff \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 9 & 6 \end{array}\right) \overset{\substack{r_1-2r_2 \\ r_3-3r_2 \\ r_2\leftrightarrow r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -3 \\ 0 & -5 & -3 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_3-r_2 \\ (-1)r_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13/10 \\ -9/10 \\ 3/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -13 \\ -9 \\ 15 \end{pmatrix},$$

d v s det polynom i $\mathbb{P}_2$ som i minsta-kvadratmening bäst ansluter till givna data är $p(x) = \dfrac{1}{10}\left(-13 - 9x + 15x^2\right)$.

7. OBS! Påståendet är inte sant i allmännhet utan endast då projektionsplanen är ortogonala mot varann, vilket de är här.
Vi börjar med att konstatera att planens normalvektorer, $\mathbf{n}_F$ och $\mathbf{n}_G$ är ortogonala;

$$\mathbf{n}_F = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}_G = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}_F \bullet \mathbf{n}_G = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 - 7 + 1 = 0.$$

Byt bas till ON-basen

$$\mathbf{f}_1 = \widehat{\mathbf{n}}_F = \frac{1}{\sqrt{54}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \widehat{\mathbf{n}}_G = \frac{1}{\sqrt{11}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_3 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \times \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{594}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -23 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{matrix} 2 & \quad & 3 \\ 7 & \quad & -1 \end{matrix}$$

Detta ger att $\mathbf{f}_2$ och $\mathbf{f}_3$ båda ligger i F:s projektionsplan. Låt $A_{F,\underline{\mathbf{f}}}$ vara avbildningsmatrisen till F med avseende på $\underline{\mathbf{f}}$. Följaktligen gäller

$$F(\mathbf{f}_1) = \mathbf{0}, \quad F(\mathbf{f}_2) = \mathbf{f}_2 = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F(\mathbf{f}_3) = \mathbf{f}_3 = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff A_{F,\underline{\mathbf{f}}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Låt $A_{G,\underline{\mathbf{f}}}$ vara avbildningsmatrisen till G med avseende på $\underline{\mathbf{f}}$. Motsvarande resonemang på G ger då, eftersom $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_3$ ligger i G:s projektionsplan, att

$$G(\mathbf{f}_1) = \mathbf{f}_1 = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad G(\mathbf{f}_2) = \mathbf{0}, \quad G(\mathbf{f}_3) = \mathbf{f}_3 = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff A_{G,\underline{\mathbf{f}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enligt **Sats 7.6.2**, sid 186 är $A_{F,\underline{\mathbf{f}}}A_{G,\underline{\mathbf{f}}}$ avbildningsmatris till $F\circ G$. Vi får

$$A_{F\circ G,\underline{\mathbf{f}}} = A_{F,\underline{\mathbf{f}}}A_{G,\underline{\mathbf{f}}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enligt **Sats 7.7.14**, sid 198 gäller att om avbildningsmatrisen i ON-bas är *symmetrisk* så är avbildningen *symmetrisk*. Då detta är fallet här har vi visat att $F\circ G$ är symmetrisk. Vidare är det klart, både från avbildningsmatrisens utseende och egenskaperna hos en ortogonalprojektion att

$$N(F\circ G) = \left[\mathbf{n}_F = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}_G = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \Longrightarrow \dim N(F\circ G) = 2,$$
$$V(F\circ G) = [\mathbf{f}_3] \Longrightarrow \dim V(F\circ G) = 1.$$