Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Ulf Janfalk

Utbildningskod: TATA31
Modul: TEN1

Tentamen i Linjär algebra (TATA31/TEN1) 2021–01–09, 8–13.

Inga hjälpmedel, förutom passare, linjal eller gradskiva. OBS! Inga formler eller liknande tryckta på linjal eller gradskiva. Ej räknedosa.
För godkänt räcker 9 poäng och minst 3 uppgifter med 2 eller 3 poäng. Godkänd kontrollskrivning ($\geq$ 11p) ht2019 ger 3 poäng på uppgift 1 (som alltså inte behöver lösas) och 16p eller mer ger 4 poäng på uppgift 1. Markera detta genom att skriva ”G” respektive ”G+1” i rutan för uppgift 1.
Fullständiga motiveringar krävs. Lösningar läggs ut måndag 11/1 på

http://courses.mai.liu.se/GU/TATA31/tentor.html

Resultat meddelas via e-post inom 10 arbetsdagar.
Alla koordinater för vektorer och punkter är, om ej annat anges, givna med avseende på ett positivt orienterat ON-system, $\mathbb{R}^n$ är ett euklidiskt rum med standardskalärprodukten och standardbasen ett positivt orienterat ON-system.

(3 p) 1. Låt $P = (3,0,0)$ och låt L vara linjen genom $P_0 = (2,-1,1)$ och $(1,-3,2)$. Bestäm avståndet mellan P och L. Bestäm också den normallinje till L som går genom P.

(3 p) 2. Bestäm den lösning till systemet av differentialekvationer

$$\begin{cases} x_1' = 7x_1 + 10x_2 \\ x_2' = -5x_1 - 8x_2 \end{cases}$$

för vilken gäller att $\lim_{t\to\infty} x_1(t)$ existerar och $x_2(0) = 3$.

(3 p) 3. Ange en ON-bas i underrummet

$$\mathbb{U} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \colon \begin{array}{rcrcrl} x_1 & + & x_3 & + & x_5 & = 0 \\ & & x_2 & + & x_4 & = 0 \end{array} \right\}.$$

Fyll sedan ut den nyss bestämda ON-basen till en ON-bas i $\mathbb{R}^5$ och ange koordinaterna för $\mathbf{u} = (1,1,1,1,1)$ i den bas du valt.

(3 p) 4. Betrakta den kvadratiska formen

$$Q(\underline{\mathbf{e}}\, X_{\underline{\mathbf{e}}}) = 5x_1^2 - 8x_1x_3 + 3x_2^2 + 5x_3^2.$$

Ange en ny ON-bas där Q skrivs med endast rena kvadrattermer. Vilken sorts yta definieras av ekvationen $Q(\mathbf{u}) = 3$? Ange största (om sådant finnes) respektive minsta avstånd från en punkt på ytan till origo samt i vilka punkter dessa avstånd antas.

VÄND!

(3 p) 5. För den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gäller

$$F(1,1,1) = (2,6,-3), \quad F(1,2,1) = (0,6,2), \quad F(1,-1,-1) = (0,2,1).$$

Bestäm F:s matris i standardbasen. Är F inverterbar?

(3 p) 6. Låt $a \in \mathbb{R}$ och betrakta den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definierad som

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1+2x_2+x_3+ax_4, -2x_1+x_2+x_4, 2x_1+3x_2+2x_3+x_4, -x_1+ax_2+x_3).$$

Bestäm a så att nollrummet får positiv dimension. För det/dessa värden på a, bestäm $\dim N(F)$ och avgör om $N(F)$ är ett underrum av $V(F)$.

(3 p) 7. Betrakta de linjära avbildningarna $F, G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ där

$$\begin{aligned} F(\mathbf{u}) &= \text{ spegelbilden av } \mathbf{u} \text{ i planet } x+y-z=0, \\ G(\mathbf{u}) &= \text{ spegelbilden av } \mathbf{u} \text{ i planet } x+2y-2z=0. \end{aligned}$$

Bevisa utgående från definitionen av isometrisk avbildning, att $F \circ G$ är isometrisk. Visa sedan, med hjälp av de i kursen bevisade satserna, att $F \circ G$ är en vridning och ange vridningsaxeln. (Vridningsvinkeln behöver *ej* anges och att en spegling är isometrisk får användas utan bevis.)

Lösningsförslag till TATA31, Linjär algebra, 2021–01–09, fm

1. Vi börjar med att ta fram L:s riktningsvektor $\mathbf{v}$ och parameterform.

$$\mathbf{v} \parallel \overline{P_0P_1} = \overline{OP}_1 - \overline{OP}_0 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix},$$

$$L\colon\ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Därefter beräknar vi

$$\overline{P_0P} = \overline{OP} - \overline{OP}_0 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},$$

$$\overline{P_0P}_{\parallel\mathbf{v}} = \frac{\overline{P_0P}\bullet\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} = \frac{1}{6}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} = \frac{2}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},$$

$$\overline{P_0P}_{\perp\mathbf{v}} = \overline{P_0P} - \overline{P_0P}_{\parallel\mathbf{v}} = \frac{1}{3}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\3\\-3\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix},$$

$$\text{Sökt avstånd } = \left|\overline{P_0P}_{\parallel\mathbf{v}}\right| = \left|\frac{1}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

Det följer också att den sökta normalen till L som går genom P har samma riktning som $\overline{P_0P}_{\perp\mathbf{v}}$ och vi får, t ex

$$N\colon\ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

2. Skriv på matrisform och bestäm egenvärden och egenvektorer.

$$X' = \begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 & 10\\-5 & -8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = AX,$$

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix}7-\lambda & 10\\-5 & -8-\lambda\end{vmatrix} = (7-\lambda)(-8-\lambda)+50 = \lambda^2+\lambda-6 = 0 \iff$$

$$\iff \lambda = 2, -3,$$

$$\underline{\underline{\lambda = 2}}:\ \left(\begin{array}{cc|c}5 & 10 & 0\\-5 & -10 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 0\\0 & 0 & 0\end{array}\right) \Longrightarrow X_2 = t\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\underline{\underline{\lambda = -3}}:\ \left(\begin{array}{cc|c}10 & 10 & 0\\-5 & -5 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{array}\right) \Longrightarrow X_{10} = t\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ur detta fås

$$X(t) = C_1e^{2t}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + C_2e^{-3t}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},$$

$$x_1(t) = 2C_1e^{2t} - C_2e^{-3t} \to \begin{cases} \infty & \text{om } C_1 > 0 \\ 0 & \text{om } C_1 = 0 \\ -\infty & \text{om } C_1 < 0 \end{cases},$$

d v s $C_1 = 0$ för att x_1 skall ha gränsvärde då $t \to \infty$. Detta ger

$$x_2(t) = C_2e^{-3t}, \quad x_2(0) = C_2 = 3 \Longrightarrow X(t) = e^{-3t}\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3. Parametrisering på vanligt sätt ger

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 - x_5 = -r - t \\ -x_4 = -s \\ r \\ s \\ t \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r, s, t \in \mathbb{R},$$

d v s $\mathbf{u}_1 = (-1, 0, 1, 0, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (0, -1, 0, 1, 0)$ och $\mathbf{u}_3 = (-1, 0, 0, 0, 1)$ är en bas i $\mathbb{U}$. Här observerar vi att $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_3$ båda är ortogonala mot $\mathbf{u}_2$ och vi väljer $\mathbf{f}_1 = \widehat{\mathbf{u}}_1$, $\mathbf{f}_2 = \widehat{\mathbf{u}}_2$ och ortogonaliserar $\mathbf{u}_3$ m.h.a. Gram-Schmidt. Vi får

$$\mathbf{u}_{3_{\|[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}} = (\mathbf{u}_3 \bullet \mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1 + (\mathbf{u}_3 \bullet \mathbf{f}_2)\,\mathbf{f}_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_{3_{\perp[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}} = \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_{3_{\|[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Normering ger då att

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_3 = -\widehat{\mathbf{u}_{3_{\perp[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

är en ON-bas i $\mathbb{U}$. Skriv ekvationerna för $\mathbb{U}$ som skalärprodukter. Då ser vi att $\mathbb{U}$ kan tolkas som rummet av vektorer ortogonala mot $(1, 0, 1, 0, 1)$ och $(0, 1, 0, 1, 0)$ ("normalerna"). Följaktligen gäller

$$\mathbb{U}^{\perp} = [(1, 0, 1, 0, 1) = \mathbf{v}_4, (0, 1, 0, 1, 0) = \mathbf{v}_5].$$

Då $\mathbf{v}_4 \perp \mathbf{v}_5$ sätter vi

$$\mathbf{f}_4 = \widehat{\mathbf{v}}_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_5 = \widehat{\mathbf{v}}_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

vilket då är en ON-bas i $\mathbb{U}^\perp$. Då $\mathbb{U} \oplus \mathbb{U}^\perp = \mathbb{R}^5$ enligt **Korollarium 6.3.11**, sid 148 så är $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4, \mathbf{f}_5$ en ON-bas i $\mathbb{R}^5$. Slutligen observerar vi att

$$\mathbf{v} = (1,1,1,1,1) = \mathbf{v}_4 + \mathbf{v}_5 = \sqrt{3}\,\mathbf{f}_4 + \sqrt{2}\,\mathbf{f}_5 = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\sqrt{3}\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

vilket förstås går att räkna fram ur koordinatsambandet $X_{\underline{\mathbf{f}}} = T^{-1}X_{\underline{\mathbf{e}}}$ också. Väljer du en annan ON-bas i $\mathbb{U}^\perp$ får du förstås andra 4:e och 5:e koordinat. De inledande tre 0:rna måste du dock få oavsett vilken ON-bas du valt eftersom $\mathbf{v} \in \mathbb{U}^\perp$

4. Skriv ekvationen på (symmetrisk) matrisform och bestäm en ON-bas av egenvektorer.

$$Q(\mathbf{u}) = Q(\underline{\mathbf{e}}\,X_{\underline{\mathbf{e}}}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 0 & -4\\0 & 3 & 0\\-4 & 0 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = X_{\underline{\mathbf{e}}}^t A X_{\underline{\mathbf{e}}},$$

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix}5-\lambda & 0 & -4\\0 & 3-\lambda & 0\\-4 & 0 & 5-\lambda\end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix}5-\lambda & -4\\-4 & 5-\lambda\end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)\left((5-\lambda)^2 - 4^2\right) = 0 \iff \lambda = 3, 5\pm 4 = 1,3,9,$$

$$\underline{\underline{\lambda = 1}}: \left(\begin{array}{ccc|c}4 & 0 & -4 & 0\\0 & 2 & 0 & 0\\-4 & 0 & 4 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \Longrightarrow X_1 = t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$\underline{\underline{\lambda = 3}}: \left(\begin{array}{ccc|c}2 & 0 & -4 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\-4 & 0 & 2 & 0\end{array}\right) \overset{\substack{r_3+2r_2\\ r_1/2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -2 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & -6 & 0\end{array}\right) \Longrightarrow X_3 = t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\underline{\underline{\lambda = 9}}: \left(\begin{array}{ccc|c}-4 & 0 & -4 & 0\\0 & -6 & 0 & 0\\-4 & 0 & -4 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \Longrightarrow X_9 = t\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Byte till denna ON-bas ger $\quad Q(\underline{\mathbf{f}}\,X_{\underline{\mathbf{f}}}) = y_1^2 + 3y_2^2 + 9y_3^2$. Då Q har enbart positiva egenvärden så är Q positivt definit och därmed är ytan $Q(\mathbf{u}) = 3$ en ellipsoid. Skriver vi ekvationen på standardform fås

$$Q(\underline{\mathbf{f}}\,X_{\underline{\mathbf{f}}}) = y_1^2 + 3y_2^2 + 9y_3^2 = 3 \iff \frac{y_1^2}{3} + y_2^2 + 3y_3^2 = \left(\frac{y_1}{\sqrt{3}}\right)^2 + y_2^2 + \left(\frac{y_3}{1/\sqrt{3}}\right)^2 = 1.$$

Ur detta ser man att längst ifrån, på avstånd $\sqrt{3}$, ligger punkterna med koordinater $P_{max} = (\pm\sqrt{3}, 0, 0)$ och närmast, på avstånd $1/\sqrt{3}$, ligger punkterna med koordinater $P_{min} = (0, 0, \pm 1/\sqrt{3})$ i den nya basen. Går vi över till den ursprungliga basen har dessa punkter ortsvektorerna

$$\overline{OP}_{max} = \underline{\mathbf{f}} \begin{pmatrix} \pm\sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \pm\sqrt{3}\mathbf{f}_1 = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\overline{OP}_{min} = \underline{\mathbf{f}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{f}_3 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2}} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

d v s de sökta punkterna har i ursprungliga koordinatsystemet koordinaterna

$$P_{max} = \pm\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right), \qquad P_{min} = \pm\left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

5. Enligt **Sats 7.3.1**, sid 174 behöver vi beräkna $F(\mathbf{e}_1)$, $F(\mathbf{e}_2)$, $F(\mathbf{e}_3)$. Förutsättningarna ger

$$\begin{aligned} F(1,1,1) &= F(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = F(\mathbf{e}_1) + F(\mathbf{e}_2) + F(\mathbf{e}_3) = (2, 6, -3), \\ F(1,2,1) &= F(\mathbf{e}_1) + 2F(\mathbf{e}_2) + F(\mathbf{e}_3) = (0, 6, 2), \\ F(1,-1,-1) &= F(\mathbf{e}_1) - F(\mathbf{e}_2) - F(\mathbf{e}_3) = (0, 2, 1). \end{aligned}$$

Detta kan vi se som ett linjärt ekvationssystem där variablerna är $F(\mathbf{e}_1)$, $F(\mathbf{e}_2)$, $F(\mathbf{e}_3)$. Skriver vi detta på matrisform fås

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(\mathbf{e}_1) \\ F(\mathbf{e}_2) \\ F(\mathbf{e}_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2,6,-3) \\ (0,6,2) \\ (0,2,1) \end{pmatrix}$$

och vi kan därmed ställa upp och behandla det precis som vanligt.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & (2,6,-3) \\ 1 & 2 & 1 & (0,6,2) \\ 1 & -1 & -1 & (0,2,1) \end{array}\right) \overset{\substack{r_2 - r_1 \\ r_1 + r_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & (2,8,-2) \\ 0 & 1 & 0 & (-2,0,5) \\ 1 & -1 & -1 & (0,2,1) \end{array}\right) \overset{\substack{r_1/2 \\ -r_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & (1,4,-1) \\ 0 & 1 & 0 & (-2,0,5) \\ -1 & 1 & 1 & (0,-2,-1) \end{array}\right) \sim$$

$$\overset{\substack{r_3 + r_1 \\ r_3 - r_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & (1,4,-1) \\ 0 & 1 & 0 & (-2,0,5) \\ 0 & 0 & 1 & (3,2,-7) \end{array}\right) \iff \begin{cases} F(\mathbf{e}_1) = (1, 4, -1) \\ F(\mathbf{e}_2) = (-2, 0, 5) \\ F(\mathbf{e}_3) = (3, 2, -7) \end{cases} \implies A_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & -7 \end{pmatrix}$$

Enligt **Sats 4.7.1**, sid 92 är existens av invers $\iff$ $\det A_{\underline{\mathbf{e}}} \neq 0$. Vi får

$$\det A_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & -7 \end{vmatrix} \overset{k_1 - 2k_3}{=} \begin{vmatrix} -5 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 13 & 5 & -7 \end{vmatrix} = 2(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 13 & 5 \end{vmatrix} = -2(-25 + 26) =$$

$$= -2 \neq 0,$$

d v s $A_{\underline{\mathbf{e}}}$ är inverterbar och därmed är också F inverterbar enligt **Sats 7.6.12**, sid 190.

6. Vi börjar med att skriva F på standardform

$$F(\mathbf{u}) = F(\underline{\mathbf{e}}\,X_{\underline{\mathbf{e}}}) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1+2x_2+x_3+ax_4 \\ -2x_1+x_2+x_4 \\ 2x_1+3x_2+2x_3+x_4 \\ -x_1+ax_2+x_3 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & a \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & a & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\,A_{\underline{\mathbf{e}}}X_{\underline{\mathbf{e}}}.$$

För att $\dim N(F) > 0$ krävs att $A_{\underline{\mathbf{e}}}X_{\underline{\mathbf{e}}} = \mathit{0}$ har icke-triviala lösningar vilket enligt Determinantkriteriet (**Korollarium 4.7.2**, sid 93) är ekvivalent med att $\det A_{\underline{\mathbf{e}}} = 0$. Vi löser därför ekvationen $\det A_{\underline{\mathbf{e}}} = 0$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & a \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & a & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_3-2r_1 \\ r_4-r_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & a \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2a+1 \\ -2 & a-2 & 0 & -a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2a+1 \\ -2 & a-2 & -a \end{vmatrix} \overset{r_3-r_1}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2a+1 \\ 0 & a-3 & -1-a \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -1 & -2a+1 \\ a-3 & -1-a \end{vmatrix} =$$

$$= -2(a+1-(-2a+1)(a-3)) = -2\left(a+1-\left(-2a^2+7a-3\right)\right) =$$

$$= -2\left(2a^2-6a+4\right) = -4\left(a^2-3a+2\right) =$$

$$= -4(a-2)(a-1) = 0 \iff a = 1, 2.$$

För $a = 1$ beräknar vi nu $N(F)$ och studerar även ekvationen “L.K. = godtycklig vektor”.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & x_1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & x_2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & x_3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & x_4 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2+2r_1 \\ 3_3-2r_1 \\ r_4+r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 5 & 2 & 3 & 2x_1+x_2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2x_1+x_3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & x_1+x_4 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2+5r_3 \\ r_4+3r_3 \\ r_3\leftrightarrow r_2}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2x_1+x_3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -8x_1+x_2+5x_3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -5x_1+3x_3+x_4 \end{array}\right) \overset{\substack{-r_2 \\ r_4-r_3}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2x_1-x_3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -8x_1+x_2+5x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3x_1-x_2-2x_3+x_4 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X = t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \Longrightarrow N(F) = [(0,-1,1,1)] \Longrightarrow \dim N(F) = 1.$$

Ur ekvationen “L.K. = godtycklig vektor” ser vi att denna är lösbar omm

$$3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \text{ d v s } V(F) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \colon 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\right\}.$$

Insättning av basvektorn i $N(F)$ ger

$$3{\cdot}0 - (-1) - 2{\cdot}1 + 1 = 0,$$

d v s basvektorn i $N(F)$ ligger i $V(F)$ och följaktligen är $N(F)$ ett underrum av $V(F)$. Motsvarande kalkyl för $a = 2$ ger

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & x_1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & x_2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & x_3 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & x_4 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2+2r_1 \\ 3_3-2r_1 \\ r_4+r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 5 & 2 & 5 & 2x_1+x_2 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & -2x_1+x_3 \\ 0 & 4 & 2 & 2 & x_1+x_4 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2+5r_3 \\ r_4+4r_3 \\ r_3\leftrightarrow r_2}}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & x_1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & -2x_1+x_3 \\ 0 & 0 & 2 & -10 & -8x_1+x_2+5x_3 \\ 0 & 0 & 2 & -10 & -7x_1+4x_3+x_4 \end{array}\right) \underset{r_4-r_3}{\overset{-r_2}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2x_1-x_3 \\ 0 & 0 & 2 & -10 & -8x_1+x_2+5x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1-x_2-x_3+x_4 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X = t\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \Longrightarrow N(F) = [(-1,-3,5,1) \Longrightarrow \dim N(F) = 1.$$

Ur ekvationen "L.K. = godtycklig vektor" ser vi att denna är lösbar omm

$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \text{ d v s } V(F) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0\right\}.$$

Insättning av basvektorn i $N(F)$ ger

$$(-1) - (-3) - 5 + 1 = -2 \neq 0,$$

d v s basvektorn i $N(F)$ ligger *inte* i $V(F)$ och följaktligen är $N(F)$ *inte* ett underrum av $V(F)$.

7. Då spegling är en isometrisk avbildning är både F och G isometriska, d v s

$$|F(\mathbf{v})| = |\mathbf{v}| \quad \text{och} \quad |G(\mathbf{u})| = |\mathbf{u}|.$$

Följaktligen, för varje $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ gäller

$$|F{\circ}G(\mathbf{u})| = |F(\underbrace{G(\mathbf{u})}_{\mathbf{v}})| = |G(\mathbf{u})| = |\mathbf{u}|,$$

d v s $F{\circ}G$ är isometrisk.
Låt A och B vara avbildningsmatriserna till F respektive G i standardbasen. Enligt **Sats 7.7.6**, sid 195 gäller då att $\det A = \det B = -1$. Enligt **Sats 7.6**, sid 186 gäller att AB är avbildningsmatris till $F{\circ}G$. Enligt produktlagen för determinanter (**Sats 4.8.1**, sid 96) gäller

$$\det AB = \det A \cdot \det B = (-1)\cdot(-1) = 1$$

och enligt **Sats 7.7.6**, sid 195 (igen) är $F{\circ}G$ en vridning. Återstår att bestämma vridningsaxeln. Då $F{\circ}G$ är en vridning är 1 egenvärde med vridningsaxeln som egenvektor. Då planen vi speglar i är egenrum till 1 för respektive avbildning inses att vektorer längs skärningslinjen mellan planen är egenvektorer till 1 för båda avbildningarna. Låt $\mathbf{u}$ vara en vektor parallell med denna linje. Då är

$$F(\mathbf{u}) = \mathbf{u}, \quad G(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \Longrightarrow F{\circ}G(\mathbf{u}) = F(G(\mathbf{u})) = F(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$$

så $\mathbf{u}$ är en egenvektor med egenvärde 1 till $F{\circ}G$, d v s $\mathbf{u}$ ger den sökta vridningsaxeln. Denna fås genom att beräkna, t ex kryssprodukten mellan planens normaler

$$\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & \quad & 1 \\ 1 & \quad & 2 \end{matrix}$$

så vridningsaxeln ges av $\mathbf{u} = (0,1,1)$.