Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Ulf Janfalk

Utbildningskod: TATA31
Modul: TEN1

Tentamen i Linjär algebra (TATA31/TEN1) 2021–03–14, 14–19.

Inga hjälpmedel, förutom passare, linjal eller gradskiva. OBS! Inga formler eller liknande tryckta på linjal eller gradskiva. Ej räknedosa.
För godkänt räcker 9 poäng och minst 3 uppgifter med 2 eller 3 poäng. Godkänd kontrollskrivning ($\geq$ 11p) ht2019 ger 3 poäng på uppgift 1 (som alltså inte behöver lösas) och 16p eller mer ger 4 poäng på uppgift 1. Markera detta genom att skriva ”G” respektive ”G+1” i rutan för uppgift 1.
Fullständiga motiveringar krävs. Lösningar läggs ut måndag 15/3 på

http://courses.mai.liu.se/GU/TATA31/tentor.html

Resultat meddelas via e-post inom 10 arbetsdagar.
Alla koordinater för vektorer och punkter är, om ej annat anges, givna med avseende på ett positivt orienterat ON-system, $\mathbb{R}^n$ är ett euklidiskt rum med standardskalärprodukten och standardbasen ett positivt orienterat ON-system.

(3 p) 1. Låt $a \in \mathbb{R}$ och betrakta linjerna

$$L_1\colon\ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}, \qquad L_2\colon \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x + 4y - 3z = -1 \end{cases}.$$

Bestäm a så att L_1 och L_2 skär varann och ange skärningspunkten. För detta värde på a bestäm ekvationen på normalform till planet som innehåller *både* L_1 och L_2.

(3 p) 2. Låt $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ vara en linjär avbildning med avbildningsmatris

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

i standardbaserna för $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$ och låt $F^*\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som har A^t som avbildningsmatris i standardbaserna för $\mathbb{R}^3$ och $\mathbb{R}^2$. Visa att $F^* \circ F$ är symmetrisk och bestäm en ON-bas av egenvektorer till $F^* \circ F$. Låt $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$ vara egenvektorerna du just bestämt. Bestäm vinkeln mellan $F(\mathbf{f}_1)$ och $F(\mathbf{f}_2)$.

(3 p) 3. Låt

$$\mathbf{p}_1 = -1 + 2x + x^2 - x^3, \qquad \mathbf{p}_2 = 1 - x - x^2 + x^3 + x^4,$$
$$\mathbf{p}_3 = 1 - x^2 + x^3 + 2x^4, \qquad \mathbf{p}_4 = 1 + 3x + 2x^2 - 2x^4$$

och sätt $\mathbb{U} = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4] \subset \mathbb{P}_4$. Bestäm en bas i $\mathbb{U}$, $\mathbb{U}$:s dimension och fyll ut basen i $\mathbb{U}$ till en bas i $\mathbb{P}_4$. Bestäm koordinaterna för $\mathbf{q} = 1 + x$ i den bas du valt.

VÄND!

(3 p) 4. Låt $\mathbf{v} = (2, 1, -4, -4, 1) \in \mathbb{R}^5$ och betrakta underrummet

$$\mathbb{U} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \colon \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 \qquad\quad - \qquad\quad x_5 = 0 \end{array} . \right\}$$

Bestäm den vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{U}^\perp$ som ligger närmast $\mathbf{v}$. Bestäm sedan avståndet mellan $\mathbb{U}$ och $\mathbf{v}$ och ange den vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{U}$ som ligger närmast $\mathbf{v}$.

(3 p) 5. Låt $a, b, c \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u} = (0, 2, 1, 1, -1)$ och betrakta den linjära avbildningen $F \colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ definierad genom

$$\begin{aligned} F(\mathbf{u}) &= F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \\ &= (x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_5,\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 5x_4 + bx_5,\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + cx_5). \end{aligned}$$

Bestäm a, b, c så att $\mathbf{u} \in N(F)$. Bestäm därefter baser i nollrum respektive värderum samt ange deras respektive dimension.

(3 p) 6. Vilken sorts kurva definieras av ekvationen

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 - 2x_2^2 + \sqrt{5}x_1 + 2\sqrt{5}x_2 = \frac{1}{12}?$$

Rita kurvan noggrant (i x_1x_2-systemet). Ange speciellt kurvans medelpunkt, kortaste avstånd från kurvan till medelpunkten och symmetriaxlar. ***Figuren skall redovisas på separat papper!*** Välj skala förnuftigt.

(3 p) 7. Den linjära avbildningen $F \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är en spegling som avbildar $\mathbf{e}_1$ på en vektor med samma riktning som $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$. Bestäm F:s matris i standardbasen samt ekvationen för speglingsplanet.

Lösningsförslag till TATA31, Linjär algebra, 2021–03–14, fm

1. Insättning av L_1 i de definierande ekvationerna för L_2 ger

$$\begin{cases} (-5+t)+2t+\ \ (a-t) = \quad a+2t-5 = \ \ 2 \\ 2(-5+t)+4t-3(a-t) = -3a+9t-10 = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} a+2t=7 \\ -a+3t=3 \end{cases} \iff$$
$$\iff \begin{cases} a+2t = \ \ 7 \\ \quad\ \ 5t = 10 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 7-2t = 3 \\ t = 2 \end{cases},$$

d v s för $a=3$ skär linjerna varann i punkten med ortsvektor

$$\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -5+2 \\ 2 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

För kontrollens skull och för att vi behöver riktningsvektorn tar vi även fram parameterformen för L_2.

$$L_2\colon \begin{cases} x+2y+\ \ z = \ \ 2 \\ 2x+4y-3z = -1 \end{cases} \overset{ekv2-2ekv1}{\iff} \begin{cases} x+2y+\ \ z = \ \ 2 \\ \qquad\quad -5z = -5 \end{cases} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow L_2\colon\ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2-2y-z = 1-2t \\ t \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t\in\mathbb{R}.$$

Notera här att för $t=2$ får vi den nyss uträknade skärningspunkten. Att det råkade bli samma t- värde är en ren slump.
Planet Π som innehåller båda linjerna har en normalvektor som är ortogonal mot linjernas riktningsvektorer, d v s prallell med deras kryssprodukt. Vi får

$$\mathbf{n}_\Pi \parallel \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \Pi\colon\ x+2y+3z = D,$$
$$\begin{matrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

$$(-3,2,1)\in\Pi \Longrightarrow D = -3+2\cdot 2+3 = 4, \quad \Pi\colon\ x+2y+3z=4.$$

2. Enligt Sats 7.6.2, sid 186 är A^tA avbildningsmatris till $F^*\circ F$. Eftersom

$$A^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\sqrt{3} \\ -1 & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

är symmetrisk och avbildningsmatris till $F^*\circ F$ i ON-basen standardbasen så följer det ur Sats 7.7.14, sid 198 att $F^*\circ F$ är symmetrisk.
Beräkna egenvärden och egenvektorer till A^tA.

$$\det(A^tA-\lambda I) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)(5-\lambda)-4 = \lambda^2-13\lambda+36 =$$
$$= (\lambda-9)(\lambda-4) = 0 \iff \lambda = 4, 9,$$

$$\underline{\underline{\lambda=4}}:\ \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_4 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t\in\mathbb{R},$$

$$\underline{\underline{\lambda = 9}}: \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_9 = t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}_2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$F(\mathbf{f}_1) = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}_3\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}_3\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix},$$

$$F(\mathbf{f}_2) = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}_3\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}_3\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

$$F(\mathbf{f}_1)\bullet F(\mathbf{f}_2) = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}_3\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}\bullet\frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}_3\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3\sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}(3 - 12 + 9) = 0,$$

d v s vinkeln mellan $F(\mathbf{f}_1)$ och $F(\mathbf{f}_2)$ är 90°

3. För att bestämma bas och dimension studerar vi beroendeekvationen. Då vi även skall fylla ut till en bas i $\mathbb{P}_4$ studeras också “L.K.= godtyckligt polynom”. Vi får

$$\lambda_1\mathbf{p}_1 + \lambda_2\mathbf{p}_2 + \lambda_3\mathbf{p}_3 + \lambda_4\mathbf{p}_4 = \mathbf{0}, \; a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4,$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & a_0 \\ 2 & -1 & 0 & 3 & 0 & a_1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & a_2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & a_4 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2+2r_1 \\ r_3+r_1 \\ r_4-r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & a_0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 0 & 2a_0+a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & a_0+a_2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -a_0+a_3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & a_4 \end{array}\right) \overset{\substack{r_5-r_2 \\ -r_1}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -a_0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 0 & 2a_0+a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & a_0+a_2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -a_0+a_3 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 0 & -2a_0-a_1+a_4 \end{array}\right) \overset{\substack{r_3+3r_4 \\ r_5-7r_4 \\ r_3\leftrightarrow -r_4}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -a_0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 0 & 2a_0+a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & a_0-a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2a_0+a_2+3a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5a_0-a_1-7a_3+a_4 \end{array}\right).$$

Vi börjar med beroendeekvationen.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t + t = -t \\ -2t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Då vi har en-parametrig lösning har vi ett löjligt element och insättning av lösningen för $t = 1$ i beroendeekvationen ger

$$-\mathbf{p}_1 - 2\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 = \mathbf{0} \iff \mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_1 + 2\mathbf{p}_2,$$

d v s vi kan utse $\mathbf{p}_3$ till löjligt element. Enligt satsen om löjliga element (Sats 5.3.16, sid 111) kan vi stryka $\mathbf{p}_3$ utan att höljet ändras. Då det efter strykningen av $\mathbf{p}_3$ inte längre finns några löjliga element bland de genererande vektorerna är dessa linjärt oberoende enligt Sats 5.4.4, sid 114. Därmed är

$$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_4 \text{ en bas i } \mathbb{U} \quad \text{och} \quad \dim \mathbb{U} = 3.$$

Då $\dim \mathbb{P}_4 = 5$ behöver vi alltså hitta två polynom att fylla ut med. Från ekvationen "L.K.= godtyckligt polynom" får vi att ekvationen är lösbar omm

$$-2a_0 + a_2 + 3a_3 = 0 \quad \text{och} \quad 5a_0 - a_1 - 7a_3 + a_4 = 0, \text{ d v s}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{U} &= [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_4] = \\ &= \left\{ a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \in \mathbb{P}_4 \colon \begin{array}{rcrcrcrcl} -2a_0 & & & + & a_2 & + & 3a_3 & & = 0 \\ 5a_0 & - & a_1 & - & & & 7a_3 & + a_4 & = 0 \end{array} \right\}\end{aligned}$$

För att välja utfyllnad använder vi Plus-satsen, Sats 5.4.21, sid 123 två gånger. Som första utfyllnad väljer vi ett polynom $\mathbf{q}_1$ som bryter mot det andra villkoret men uppfyller det första, t ex $\mathbf{q}_1 = x$. Då $\mathbf{q}_1 \notin \mathbb{U} = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_4]$ ger Plussatsen att $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_4$ och $\mathbf{q}_1$ är linjärt oberonde och därmed en bas för sitt eget hölje. Vidare gäller att

$$[\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_4, \mathbf{q}_1] = \left\{ a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \in \mathbb{P}_4 \colon -2a_0 + a_2 + 3a_3 = 0 \right\}.$$

Som sista utfyllnad väljer vi ett polynom som bryter mot det återstående villkoret, t ex $\mathbf{q}_2 = 1$. Då $\mathbf{q}_2 \notin [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_4, \mathbf{q}_1]$ ger Plus-satsen igen att $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_4, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ är linjärt oberoende. Då de också är "rätt antal" ger Satsen om rätt antal element, Sats 5.4.19, sid 121 att $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_4, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ är en bas i $\mathbb{P}_5$.
Slutligen, eftersom

$$1 + x = \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_1 = 0\mathbf{p}_1 + 0\mathbf{p}_2 + 0\mathbf{p}_4 + 1\mathbf{q}_1 + 1\mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_4 & \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

d v s koordinaterna är $0, 0, 0, 1, 1$ i den bas vi valt.

4. Om vi skriver ekvationerna som definierar $\mathbb{U}$ som skalärprodukter fås

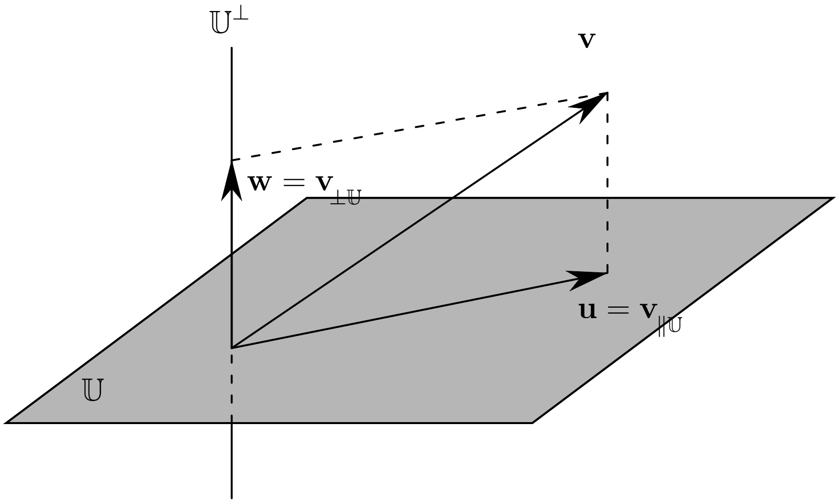
$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0,$$

$$x_1 + 2x_2 - x_5 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0.$$

Det betyder att $\mathbb{U}$ består av de vektorer som är ortogonala mot $(1, 2, -1, 3, 1)$ och $(1, 2, 0, 0, -1)$, d v s

$$\mathbb{U}^\perp = [(1, 2, -1, 3, 1), (1, 2, 0, 0, -1)].$$

För att tydligare se vad som behöver räknas ut, betrakta nedanstående figur.



Som framgår av figuren är de sökta vektorerna ortogonalprojektionen av $\mathbf{v}$ på $\mathbb{U}$ respektive på $\mathbb{U}^\perp$. Först bestämmer vi oss för vilken vi vill räkna ut, $\mathbf{u}$ eller $\mathbf{w}$. Det går förstås utmärkt att bestämma en ON-bas i antingen $\mathbb{U}$ eller $\mathbb{U}^\perp$ och med hjälp av denna beräkna någon av projektionerna. Här tänker jag beräkna $\mathbf{w}$ med minsta-kvadratmetoden. Eftersom ekvationssystemet

$$\lambda_1(1,2,-1,3,1) + \lambda_2(1,2,0,0,-1) = \underline{\mathbf{e}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}}_{X} = \underline{\mathbf{e}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{Y}$$

är olösbart så ger Sats 6.4.1, sid 162 att minsta-kvadratlösningen multiplicerad med koefficientmatrisen blir ortogonalprojektionen på höljet av koefficientmatrisens kolonner, d v s på $\mathbb{U}^\perp$. Vi får

$$A^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix},$$

$$A^tY = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$X_0 = (A^tA)^{-1}A^tY = \frac{1}{80}\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{80}\begin{pmatrix} -30 \\ 60 \end{pmatrix} = \frac{3}{8}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}^\perp} = \mathbf{w} = \underline{\mathbf{e}}_5 A X_0 = \frac{3}{8}\underline{\mathbf{e}}_5 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{3}{8}\underline{\mathbf{e}}_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Ur figuren ser vi nu att det sökta avståndet är

$$\min_{\mathbf{u}\in\mathbb{U}} |\mathbf{v}-\mathbf{u}| = \left|\mathbf{v}-\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}\right| = \left|\mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}}\right| = |\mathbf{w}| = \left| \frac{3}{8}\underline{\mathbf{e}}_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \right| =$$

$$= \frac{3}{8}\sqrt{1^2+2^2+1^2+(-3)^2+(-3)^2} = \frac{3}{8}\sqrt{24} = \frac{3\sqrt{6}}{4}$$

och att

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}-\mathbf{w} = \underline{\mathbf{e}}_5 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{8}\underline{\mathbf{e}}_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\left(\underline{\mathbf{e}}_5 \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ -32 \\ -32 \\ 8 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}_5 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \\ -9 \\ -9 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{8}\underline{\mathbf{e}}_5 \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ -35 \\ -23 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

5. Vi börjar med att skriva F på matrisform.

$$F(\mathbf{u}) = F(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = F\left(\underline{\mathbf{e}}_5 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \right)$$

$$= (x_1+2x_2+x_3+ax_5,\ 2x_1-x_2-3x_3+5x_4+bx_5,\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4+cx_5) =$$

$$= \underline{\mathbf{e}}_3 \begin{pmatrix} x_1+2x_2+x_3+ax_5 \\ 2x_1-x_2-3x_3+5x_4+bx_5 \\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4+cx_5 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}_3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & a \\ 2 & -1 & -3 & 5 & b \\ 2 & 3 & 1 & 1 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}.$$

Att $\mathbf{u} = (0,2,1,1,-1) \in N(F)$ innebär, som bekant att, $F(0,2,1,1,-1) = \mathbf{0}$. Beräkning med hjälp av matrisformen ger

$$F(0,2,1,1,-1) = \underline{\mathbf{e}}_3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & a \\ 2 & -1 & -3 & 5 & b \\ 2 & 3 & 1 & 1 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}_3 \begin{pmatrix} 5-a \\ -b \\ 8-c \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff a=5, \quad b=0, \quad c=8.$$

Vi fortsätter med beräkning av $N(F)$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 8 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-2r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 5 & -10 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2-5r_3 \\ r_2\leftrightarrow -r_3}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{r_1-2r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r-2s-t \\ -r+s-2t \\ r \\ s \\ t \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad r, s, t \in \mathbb{R},$$

d v s $\quad (1, -1, 1, 0, 0), (-2, 1, 0, 1, 0), (1, 2, 0, 0, -1)$ är en bas i $N(F)$ vilket ger $\dim N(F) = 3$. Dimensionssatsen, Sats 7.5.6, sid 182 ger då att

$$\dim V(F) = \dim R^5 - \dim N(F) = 5 - 3 = 2.$$

Enligt Sats 7.5.4, sid 181 är värderummet detsamma som höljet av avbildningsmatrisens kolonnvektorer, $\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_5$. För att få fram en bas måste vi därför hitta tre löjliga element. Då beroendeekvationen för kolonnerna är samma ekvation som den ekvation vi just löst utnyttjar vi denna lösning.

$$\begin{array}{llll} \underline{\underline{r = 1, s = 0, t = 0}}: & \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = \mathbf{0} & \Longleftrightarrow & \mathbf{k}_3 = -\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \\ \underline{\underline{r = 0, s = 1, t = 0}}: & -2\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4 = \mathbf{0} & \Longleftrightarrow & \mathbf{k}_4 = 2\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2, \\ \underline{\underline{r = 0, s = 0, t = -1}}: & \mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_5 = \mathbf{0} & \Longleftrightarrow & \mathbf{k}_5 = \mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2, \end{array}$$

d v s vi kan utse $\mathbf{k}_3$, $\mathbf{k}_4$ och $\mathbf{k}_5$ till löjliga element. Satsen om löjliga element, Sats 5.3.16, sid 111 ger då att

$$V(F) = \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}\right] = \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right]$$

och dimensionen blir därmed 2 (vilket vi redan visste).

6. Börja med att skriva f på matrisform

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= x_1^2 - 4x_1x_2 - 2x_2^2 + \sqrt{5}x_1 + 2\sqrt{5}x_2 = \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}}_{A_{\underline{\mathbf{e}}}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \sqrt{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \\ &= Q(\underline{\mathbf{e}}\, X_{\underline{\mathbf{e}}}) + \sqrt{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} X_{\underline{\mathbf{e}}}. \end{aligned}$$

Beräkna sedan egenvärden och egenvektorer till Q. Vi får

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(-2 - \lambda) - 4 = \lambda^2 + \lambda - 6 = \\ &= (\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0 \iff \lambda = 2, -3, \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\lambda = 2}}: \quad \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_2 = t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\underline{\underline{\lambda = -3}}: \quad \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_{-3} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}T = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Då egenvärdena har olika tecken är kurvan en hyperbel. Byter vi till ON-basen av egenvektorer med hjälp av koordinatsambandet

$$X_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = TX_{\underline{\mathbf{f}}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

fås

$$\begin{aligned} f(y_1, y_2) &= 2y_1^2 - 3y_2^2 + \sqrt{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \\ &= 2y_1^2 - 3y_2^2 + \sqrt{5}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \\ &= 2y_1^2 - 3y_2^2 + \begin{pmatrix} 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 2y_1^2 - 3y_2^2 + 5y_2 = 2y_1^2 - 3\left(y_2^2 - \frac{5}{3}y_2\right) = \\ &= 2y_1^2 - 3\left(\left(y_2 - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{36}\right) = 2y_1^2 - 3\left(y_2 - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{25}{12} = \frac{1}{12} \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow 2y_1^2 - 3\left(y_2 - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{1}{12} - \frac{25}{12} = -2 \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y_1^2 - \frac{3}{2}\left(y_2 - \frac{5}{6}\right)^2 = y_1^2 - \left(\frac{y_2 - \frac{5}{6}}{\sqrt{2/3}}\right)^2 = -1. \end{aligned}$$

Ur detta utläser vi att ortsvektorn för kurvans medelpunkt, M är

$$\overline{OM} = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 0 \\ 5/6 \end{pmatrix} = \frac{5}{6}\mathbf{f}_2 = \frac{5}{6}\frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{6}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow M = \left(\frac{\sqrt{5}}{6}, \frac{2\sqrt{5}}{6}\right)$$

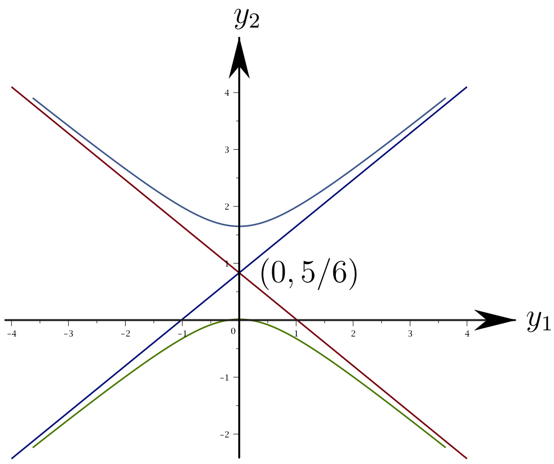
och att vi är närmast medelpunkten då $y_1 = 0$ och därmed

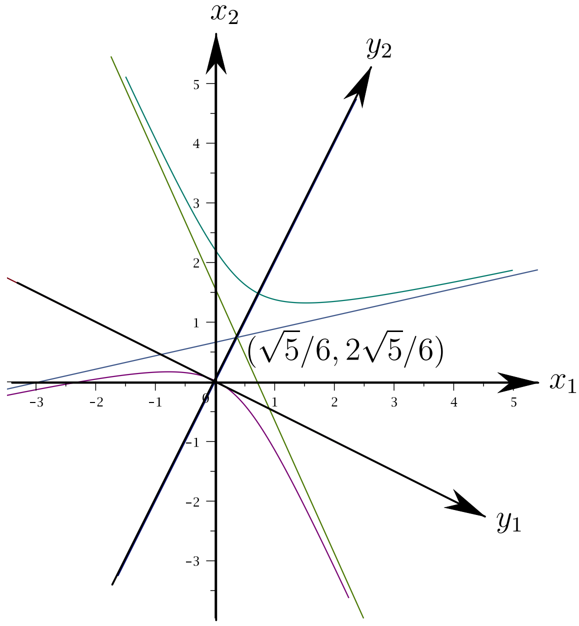
$$-\left(\frac{y_2 - \frac{5}{6}}{\sqrt{2/3}}\right)^2 = -1 \Longleftrightarrow \left|\frac{y_2 - \frac{5}{6}}{\sqrt{2/3}}\right| = 1 \Longleftrightarrow \left|y_2 - \frac{5}{6}\right| = \sqrt{2/3},$$

d v s punkterna som ligger närmast ligger på avståndet $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Eftersom de närmaste punkterna ligger på y_2-axeln ligger hyperbeln som den vänstra figuren visar. Det krävs inte, men är enklare att rita ifall man beräknar asymptoterna. Dessa fås ur

$$\begin{aligned} y_1^2 - \left(\frac{y_2 - \frac{5}{6}}{\sqrt{2/3}}\right)^2 &= \left(y_1 - \frac{y_2 - \frac{5}{6}}{\sqrt{2/3}}\right)\left(y_1 + \frac{y_2 - \frac{5}{6}}{\sqrt{2/3}}\right) = 0 \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y_2 - \frac{5}{6} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}y_1 \Longleftrightarrow y_2 = \frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{2}{3}}y_1. \end{aligned}$$

För att få kurvan i x_1x_2-systemet, tänk att du tar tag i y_1-axeln och vrider koordinatsystemet så att y_1-axeln sammanfaller med riktningen $(2,-1)$, vilket då ger den högra figuren.





7. Då en spegling är isometrisk och då $|\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3| = \sqrt{2}$ följer det att

$$F(\mathbf{e}_1) = (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3)/\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \Longrightarrow A_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{22} & a_{23}\\ 1/\sqrt{2} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}.$$

Då en spegling även är symmetrisk och då standardbasen är en ON-bas innebär detta att avbildningsmatrisen $A_{\underline{\mathbf{e}}}$ också är symmetrisk. Detta ger att

$$a_{12} = 0, \quad a_{13} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{och} \quad a_{23} = a_{32} = a \quad \text{så att} \quad A_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2}\\ 0 & a_{22} & a\\ 1/\sqrt{2} & a & a_{33}\end{pmatrix}.$$

Vidare, då F är isometrisk är $A_{\underline{\mathbf{e}}}$ en ON-matris enligt Sats 7.7.2, sid 191. Enligt Sats 6.3.23, sid 156 innebär detta att kolonnvektorerna är en ON-bas, d v s skalärprodukten av en kolonnvektor med sig själv blir 1 och mellan olika kolonner 0 och enligt Sats 7.7.6, sid 195 är $\det A_{\underline{\mathbf{e}}} = -1$. Detta ger

$$\mathbf{k}_1 \bullet \mathbf{k}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\a_{22}\\a\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}a = 0 \iff a = 0,$$

$$\mathbf{k}_1 \bullet \mathbf{k}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}^2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\\sqrt{2}a_{33}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{2}a_{33}\right) = 0 \iff a_{33} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\det A_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{vmatrix}1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2}\\ 0 & a_{22} & 0\\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2}\end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}^2}a_{22}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix} = \frac{1}{2}a_{22}(-2) = -1 \iff$$

$$\Longleftrightarrow \; a_{22}=1 \Longrightarrow A_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Återstår att bestämma ekvationen för speglingsplanet. Speglingsplanet är egenrum till egenvärdet 1 och då egenrummen till en symmetrisk avbildning är ortogonala enligt Sats 8.3.3, sid 214 är speglingsplanets normal en egenvektor till egenvärdet -1. Beräkning av denna på vanligt sätt ger

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1/\sqrt{2}+1 & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1-1/\sqrt{2} & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\sqrt{2}r_1 \\ \sqrt{2}r_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} \sqrt{2}+1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2}-1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_1-(\sqrt{2}+1)r_3 \\ r_1 \leftrightarrow r_3}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \sqrt{2}-1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_{-1} = t\begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

vilket ger att speglingsplanets ekvation blir

$$(\sqrt{2}-1)x - z = 0.$$