LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Ulf Janfalk

Utbildningskod: TATA31
Provkod: KTR1

Kontrollskrivning i Linjär algebra 2021–10–26, 14–18.

Inga hjälpmedel, förutom passare, linjal eller gradskiva. OBS! Inga formler eller liknande tryckta på linjal eller gradskiva. Ej räknedosa.
På uppgift 1–14 skall ***endast svar*** ges. Varje rätt svar ger 1 poäng, fel svar 0 poäng.
Flera svar får och bör ges på samma blad, helst i nummerordning.
Uppgift 15 och 16 ger tre poäng vardera; ***fullständiga och välmotiverade lösningar krävs.***
Minst 11 poäng tillgodoräknas som tre poäng på uppgift 1 på tentamen.
Minst 16 poäng ger ytterligare en bonuspoäng på tentamen.
Rätten att tillgodoräkna sig bonus består under läsåret 2021-2022.
Resultatet meddelas via e-post. Lösningar läggs ut efter skrivtidens slut på

http://courses.mai.liu.se/GU/TATA31/tentor.html

Om inget annat sägs, är alla koordinater för vektorer i planet och rummet givna relativt en högerorienterad ON-bas.

1. Ange lösningsmängden till ekvationssystemet som har totalmatrisen
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -4 \end{array}\right).$$

2. Betrakta matriserna
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Beräkna det/de av uttrycken nedan som är definierade:
$$A + B, \quad BA, \quad AB^t, \quad A^t + B.$$

3. Tag ett nytt pappersark och rita på detta ett vanligt rätvinkligt koordinatsystem (höger ON). Låt **två rutor** svara mot **en längdenhet**. Låt $\underline{\mathbf{e}}$ vara en ON-bas där $\mathbf{e}_1$ pekar i den vågräta koordinataxelns riktning och $\mathbf{e}_2$ i den lodräta axelns riktning. Rita i detta koordinatsystem in, så exakt som möjligt, vektorerna $\mathbf{u} = 8\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2$, $\mathbf{v} = 7\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2$, den ortogonala projektionen av $\mathbf{u}$ på $\mathbf{v}$ och den ortogonala projektionen av $\mathbf{v}$ på $\mathbf{u}$.

4. Låt $\mathbf{p}_1 = 1 + x$, $\mathbf{p}_2 = -2 - 3x$ och $\mathbf{q} = 5 + x$. Skriv $\mathbf{q}$ som en linjärkombination av $\mathbf{p}_1$ och $\mathbf{p}_2$.

5. Linjen L går genom punkterna $(1, 2)$ och $(3, -1)$. Ange L:s ekvation på *parameterform*. Ange sedan, på *normalform*, den normal N till L som går genom $(-2, 4)$.

6. Låt L vara linjen genom $(2, -1, 3)$ med riktningsvektor $\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$. Ange den punkt Q på L som ligger närmast $(-2, 1, -4)$.

7. Ange en *enhetsvektor* som är ortogonal mot vektorerna

$$\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 \quad \text{och} \quad 4\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 + 6\mathbf{e}_3.$$

8. Låt L vara linjen genom punkten $(2, -1, 0)$ och riktningsvektor $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$. Bestäm, på *normalform*, ekvationen för planet Π som innehåller L och går genom punkten $(1, 1, 2)$

9. Bestäm punktens $P = (1, 2, 2)$ spegelbild i planet Π: $2x - y + z = 5$.

10. För vilket/vilka $\lambda \in \mathbb{R}$ ***saknar*** ekvationssystemet nedan lösningar,

$$\begin{cases} 2x + \lambda y = 6 \\ \lambda x + 8y = 12 \end{cases} ?$$

11. Bestäm $a, b \in \mathbb{R}$ så att matriserna A och B nedan, om möjligt, blir varandras inverser,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Beräkna $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ \mathrm{e} & 2\mathrm{e} & 3\mathrm{e} & \sin 1 & \cos 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 0 & \sqrt{6} & \sqrt{7} \\ \ln 2 & \ln 3 & 0 & \ln 4 & 0 \\ \pi & 2\pi & 0 & 3\pi & 0 \end{vmatrix}$.

13. Bestäm skärningspunkten (om sådan finnes) mellan linjerna

$$L_1\colon\ \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{och}$$

$$L_2\colon\ \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

14. Lös matrisekvationen $B^t X^t = A^t - (XA)^t$ där

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

(3 p) 15. För vilka värden på $a, b \in \mathbb{R}$ har ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x - y + z = b \\ ax + 4y + z = 35 \\ 4x - 2y + az = b \end{cases}$$

entydig lösning, ingen lösning eller oändligt många lösningar. Om systemet i något fall har oändligt många lösningar skall dessa anges.

16. Betrakta nedanstående vektorer i $\mathbb{R}^5$

$$\begin{array}{lll} \mathbf{u}_1 = (-1, -1, 2, 2, 2), & \mathbf{u}_2 = (0, -1, 2, 3, 3), & \mathbf{u}_3 = (3, 2, -4, -3, -3), \\ \mathbf{u}_4 = (2, 1, -2, -1, -1), & \mathbf{u}_5 = (7, 3, -6, -2, -2) & \end{array}$$

och definiera underrummet $\mathbb{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5] \subset \mathbb{R}^5$. Beskriv $\mathbb{U}$ med så få som möjligt av de genererande vektorerna ovan. Avgör sedan om någon av vektorerna

$$\mathbf{v}_1 = (-2, -1, 2, 1, 1), \quad \mathbf{v}_2 = (3, 1, -2, 1, 1), \quad \mathbf{v}_3 = (1, 0, 1, 0, 0)$$

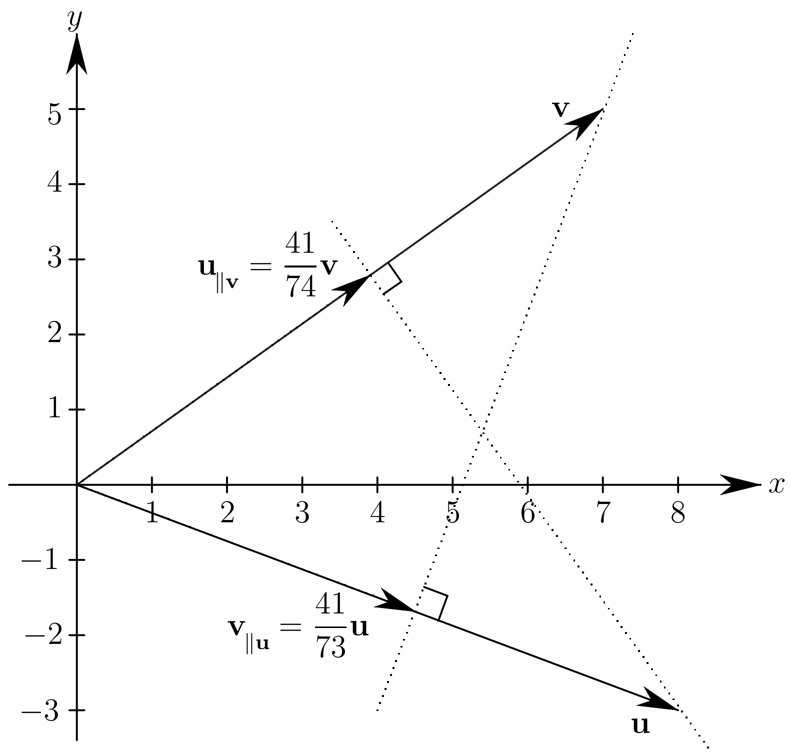
tillhör $\mathbb{U}$.

Lösningsförslag till TATA31. Linjär algebra, 2021–10–26

1. $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

2. $A + B$ och AB^t är inte definierade

$$BA = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ -1 & 1 & 3 \\ 9 & 12 & 15 \end{pmatrix}, \quad A^t + B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

3. 

4. $\mathbf{q} = 13\mathbf{p}_1 + 4\mathbf{p}_2$

5. L: $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad N\colon 2x - 3y = -16$

6. $Q = \left(\frac{1}{2}, -4, -\frac{3}{2}\right)$

7. $(\pm)\frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = (\pm)\frac{1}{\sqrt{6}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

8. Π: $2x + 3y - 2z = 1$

9. $(3, 1, 3)$

10. $\lambda = -4$

11. $a = 0, b = -3$

12. $-3e\pi\sqrt{7}(2\ln 2 - \ln 3) = -3e\pi\sqrt{7}\ln\dfrac{4}{3}$

13. $(3/2, 3/2, 3/2)$

14. $X = -A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

15. Skriv ekvationssystemet på matrisform

$$\begin{cases} 2x - y + z = b \\ ax + 4y + z = 35 \\ 4x - 2y + az = b \end{cases} \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & b \\ a & 4 & 1 & 35 \\ 4 & -2 & a & b \end{array}\right)$$

Beräkna determinanten av koefficientmatrisen och använd sedan determinantkriteriet (Korollarium 4.7.2, sid 93). Vi får

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ a & 4 & 1 \\ 4 & -2 & a \end{vmatrix} \overset{\substack{k_1+2k_2 \\ k_3+k_2}}{=} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ a+8 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & a-2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}(a+8)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & a-2 \end{vmatrix} =$$

$$= (a+8)(a-2) = 0 \iff a = 2, -8.$$

Determinantkriteriet ger då att ekvationssystemet har entydig lösning omm $a \neq -8$ och $a \neq 2$. Fallen $a = -8$ respektive 2 kontrolleras separat.

$$\underline{\underline{a = -8}}: \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & b \\ -8 & 4 & 1 & 35 \\ 4 & -2 & -8 & b \end{array}\right) \overset{\substack{r_2+4r_1 \\ r_3-2r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 5 & 35+4b \\ 0 & 0 & -10 & -b \end{array}\right) \overset{r_3+2r_2}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 5 & 35+4b \\ 0 & 0 & 0 & 70+7b \end{array}\right).$$

Följaktligen, lösning saknas om $70 + 7b \neq 0 \iff b \neq -10$ och vi har oändligt många lösningar för $b = -10$. För $b = -10$ fås

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 10+2x+z = 10+2t-1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$\underline{\underline{a = 2}}: \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & b \\ 2 & 4 & 1 & 35 \\ 4 & -2 & 2 & b \end{array}\right) \overset{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-2r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & b \\ 0 & 5 & 0 & 35-b \\ 0 & 0 & 0 & -b \end{array}\right).$$

Följaktligen har vi oändligt många lösningar om $b = 0$ och inga om $b \neq 0$. För $b = 0$ fås

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 7 \\ y - 2x = 7 - 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sammanfattningsvis

(i) entydig lösning då $a \neq -8$ och 2,

(ii) ingen lösning då $a = -8$ och $b \neq -10$ eller $a = 2$ och $b \neq 0$,

(iii) oändligt många då $a = -8$ och $b = -10$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$

eller $a = 2$, $b = 0$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$

16. Vi ställer upp beroendeekvationen för de genererande vektorerna. Vi ställer också upp ekvationen "L.K.=godtycklig vektor" för att enklare kunna avgöra om $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ tillhör $\mathbb{U}$ eller inte. Kalla de genererande vektorerna $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_5$.

$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3 + \lambda_4 \mathbf{u}_4 + \lambda_5 \mathbf{u}_5 =$

$$= \lambda_1 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda_4 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_5 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -6 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 2 & 7 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -4 & -2 & -6 \\ 2 & 3 & -3 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{pmatrix} = \mathbf{0} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|cc} -1 & 0 & 3 & 2 & 7 & 0 & x_1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 3 & 0 & x_2 \\ 2 & 2 & -4 & -2 & -6 & 0 & x_3 \\ 2 & 3 & -3 & -1 & -2 & 0 & x_4 \\ 2 & 3 & -3 & -1 & -2 & 0 & x_5 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 + 2r_1 \\ r_4 + 2r_1 \\ r_5 + 2r_1 \\ -r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 0 & -3 & -2 & -7 & 0 & -x_1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -4 & 0 & -x_1 + x_2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 8 & 0 & 2x_1 + x_3 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 12 & 0 & 2x_1 + x_4 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 12 & 0 & 2x_1 + x_5 \end{array}\right) \overset{\substack{r_3 + 2r_2 \\ r_4 + 3r_2 \\ r_5 - r_4 \\ -r_2}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 0 & -3 & -2 & -7 & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & x_1 - x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 + 3x_2 + x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_4 + x_5 \end{array}\right).$$

Vi börjar med beroendeekvationen.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\lambda_3+2\lambda_4+7\lambda_5 = 3r+2s+7t \\ -\lambda_3-\lambda_4-4\lambda_5 =- r-s-4t \\ r \\ s \\ t \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r, s, t \in \mathbb{R}$$

vilket ger

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\underline{r = 1, s = 0, t = 0}}}: &\quad 3\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 = \mathbf{0} \iff \mathbf{u}_3 = -3\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \\ \underline{\underline{\underline{r = 0, s = 1, t = 0}}}: &\quad 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_4 = \mathbf{0} \iff \mathbf{u}_4 = -2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \\ \underline{\underline{\underline{r = 0, s = 0, t = 1}}}: &\quad 7\mathbf{u}_1 - 4\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_5 = \mathbf{0} \iff \mathbf{u}_5 = -7\mathbf{u}_1 + 4\mathbf{u}_2. \end{aligned}$$

Med hänvisning till ovanstående ger satsen om löjliga element (Sats 5.3.16, sid 111) att $\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ och $\mathbf{u}_5$ kan strykas i beskrivningen av $\mathbb{U}$ utan att det påverkar, d v s

$$\mathbb{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] = [(-1, -1, 2, 2, 2), (0, -1, 2, 3, 3)].$$

Ekvationen "L.K.=godtycklig vektor" är lösbar omm

$$2x_2 + x_3 = 0, \quad -x_1 + 3x_2 + x_4 = 0, \quad \text{och} \quad - x_4 + x_5 = 0.$$

Följaktligen är en vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ är linjärkombination av $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_5$, d v s tillhör $\mathbb{U}$ omm

$$2x_2 + x_3 = 0, \quad -x_1 + 3x_2 + x_4 = 0, \quad \text{och} \quad - x_4 + x_5 = 0.$$

Detta ger att vi får en beskrivning av $\mathbb{U}$ också som lösningsrum,

$$\begin{aligned} \mathbb{U} &= [(-1, -1, 2, 2, 2), (0, -1, 2, 3, 3)] = \\ &= \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4\colon \begin{array}{rcl} 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 & = & 0 \\ -x_4 + x_5 & = & 0 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Då alla tre villkoren måste vara uppfyllda ger insättning av koordinaterna för $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ respektive $\mathbf{v}_3$ att

	$2x_2 + x_3$	$-x_1 + 3x_2 + x_4$	$-x_4 + x_5$	
$\mathbf{v}_1 = (-2, -1, 2, 1, 1)$	0	0	0	$\in \mathbb{U}$
$\mathbf{v}_2 = (3, 1, -2, 1, 1)$	0	1	0	$\notin \mathbb{U}$
$\mathbf{v}_3 = (1, 0, 1, 0, 0)$	1	-1	0	$\notin \mathbb{U}$

d v s $\mathbf{v}_1$ är den enda av de tre som ligger i $\mathbb{U}$.