Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Ulf Janfalk

Utbildningskod: TATA31
Modul: TEN1

Tentamen i Linjär algebra (TATA31/TEN1) 2022–08–19, 14–19.

Inga hjälpmedel, förutom passare, linjal eller gradskiva. OBS! Inga formler eller liknande tryckta på linjal eller gradskiva. Ej räknedosa.
För godkänt räcker 9 poäng och minst 3 uppgifter med 2 eller 3 poäng. Godkänd kontrollskrivning ($\geq$ 11p) ht2021 ger 3 poäng på uppgift 1 (som alltså inte behöver lösas) och 16p eller mer ger 4 poäng på uppgift 1. Markera detta genom att skriva ”G” respektive ”G+1” i rutan för uppgift 1.
Fullständiga motiveringar krävs. Lösningar läggs ut måndag 22/8 på

http://courses.mai.liu.se/GU/TATA31/tentor.html

Resultat meddelas via e-post inom 10 arbetsdagar.
Alla koordinater för vektorer och punkter är, om ej annat anges, givna med avseende på ett positivt orienterat ON-system, $\mathbb{R}^n$ är ett euklidiskt rum med standardskalärprodukten och standardbasen ett positivt orienterat ON-system.

(1 p) 1. (a) Låt $P_1=(1,2)$, $P_2=(2,-3)$. Bestäm, på ***parameterform***, linjen L som går genom P_1 och P_2. Bestäm, på ***normalform***, den normal N till L som går genom P_2.

(2 p) (b) Betrakta matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beräkna A^{-1}. Redovisa endast kontrollen av att ditt svar är korrekt genom att beräkna $A^{-1}A$ med det svar angivit.
OBS! Inga kalkyler andra än $A^{-1}A$ får redovisas!

(1 p) 2. (a) Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är en spegling i planet $x - y + z = 0$. Bestäm matrisen till F i standardbasen.

(2 p) (b) Bevisa att ditt svar i (a) är rätt genom att med hjälp av din nyss framtagna matris beräkna

- F(planets normal),
- F(vektor i planet) för två linjärt oberoende vektorer i planet.

(3 p) 3. Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har i standardbasen avbildningsmatrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -2 & 3 & b \\ 4 & -5 & c \end{pmatrix}.$$

Bestäm $a, b, c \in \mathbb{R}$ så att $\mathbf{u}_1 = (1,0,1)$ samt $\mathbf{u}_2 = (1,1,-1)$ blir egenvektorer och bestäm deras respektive egenvärden. Bestäm därefter eventuella återstående egenvektorer.

VÄND!

(3 p) 4. Konstruera själv en linjär avbildning $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ för vilken gäller att

- $V(F) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\colon x - 2y + z = 0\}$,
- $N(F) = [(1, 1, -1)]$,

d v s ange avbildningsmatrisen i standardbasen till ditt exempel (finns många).

(3 p) 5. Bestäm en ON-bas i underrummet

$$\mathbb{U} = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4\colon \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

och fyll sedan ut den till en ON-bas i $\mathbb{R}^4$. Bestäm koordinaterna till standardbasvektorn $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, 0)$ i den bas du valt. ***För full poäng krävs att du redovisar de kontroller som krävs för att garantera att din angivna bas är en ON-bas i $\mathbb{R}^4$.***

(3 p) 6. Ekvationen $11x^2 + 4xy + 14y^2 = 150$ definierar en ellips. Rita ellipsen noggrant på ***separat papper*** (välj skala förnuftigt). Ange speciellt halvaxellängder, symmetriaxlar och skärningspunkter med koordinataxlarna (på ett ungefär). Beräkna också koordinaterna för de punkter som ligger närmast respektive längst ifrån origo.

(3 p) 7. En linjär avbildning $F\colon \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_2$ definieras av

$$F(p(x)) = (-x^2 + x - 1)p'''(x) + (2x - 3)p''(x) + 2p'(x) + (x^2 - 1)p(2)$$

Bestäm en bas i nollrummet $N(F)$ och en bas i värderummet $V(F)$.
I svaret skall baspolynomen skrivas som de polynom de är, inte som koordinatmatriser!
OBS! $p'(x), p''(x), p'''(x)$ står för polynomets första-, andra- respektive tredjederivata. Sista termens andra faktor är och skall vara $p(2)$.

Lösningsförslag till TATA31, Linjär algebra, 2022–08–19.

1. (a) Vi börjar med att bestämma L:s riktningsvektor som ju är parallell med $\overline{P_1P_2}$.

$$\mathbf{v} \parallel \overline{P_1P_2} = \overline{OP}_2 - \overline{OP}_1 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix},$$
$$L\colon\ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Då L och N är vinkelräta mot varann är L:s riktningsvektor normalvektor till N och då N skall gå genom P_2 fås

$$N\colon\ 1{\cdot}x + (-5){\cdot}y = x - 5y = D,$$
$$P_2 \in N \Longrightarrow 2 - 5{\cdot}(-3) = 17 = D,$$

d v s $N\colon\ x - 5y = 17$.

(b) Beräkna A^{-1} genom att på vanligt sätt lösa matrisekvationen $AX = I$. Resultatet blir då

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\-3 & -2 & 7\\2 & 1 & -4\end{pmatrix}.$$

Återstår att utföra den påbjudna kontrollen.

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\-3 & -2 & 7\\2 & 1 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 0 & -1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \text{VSB}$$

2. (a) Från ekvationen läser vi av planets normal $\mathbf{n} = (1, -1, 1)$. Med hjälp av denna beräknar vi

$$F(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - 2\mathbf{u}_{\parallel\mathbf{n}} = \mathbf{u} - 2\frac{\mathbf{u}\bullet\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n} = \mathbf{u} - \frac{2}{3}\,(\mathbf{u}\bullet\mathbf{n})\,\mathbf{n}.$$

Avbildningsmatrisen fås sedan genom att beräkna F(standardbasvektorerna).

$$F(\mathbf{e}_1){=}\mathbf{e}_1 - \frac{2}{3}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)\mathbf{n}{=}\frac{1}{3}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}\right){=}\frac{1}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix},$$
$$F(\mathbf{e}_2){=}\mathbf{e}_2 - \frac{2}{3}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)\mathbf{n}{=}\frac{1}{3}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}\right){=}\frac{1}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},$$
$$F(\mathbf{e}_3){=}\mathbf{e}_3 - \frac{2}{3}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)\mathbf{n}{=}\frac{1}{3}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}\right){=}\frac{1}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix},$$
$$A{=}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\2 & 1 & 2\\-2 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

(b) Då F utför en spegling i planet $x - y + z = 0$ gäller att

- F(planets normal) $=$ $-$planets normal,

$$F(\mathbf{n}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\mathbf{n},$$

- F(vektor i planet) $=$ samma vektor i planet. Med, exempelvis $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0)$ och $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 1)$ som båda ligger i planet fås

$$F(\mathbf{v}_1) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{v_1},$$

$$F(\mathbf{v}_2) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{v_2}$$

.

Därmed är det bevisat att avbildningsmatrisen är korrekt.

3. Enligt definitionen av egenvärde/egenvektor (se **Definition 8.1.1**, sid 205) gäller

$$F(\mathbf{u}_1) = F\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -2 & 3 & b \\ 4 & -5 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1+a \\ -2+b \\ 4+c \end{pmatrix} = \lambda_1\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 1+a = \lambda_1 \\ b-2 = 0 \\ 4+c = \lambda_1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 1+a = \lambda_1 \\ b = 2 \\ 4+c = 1+a \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 1+a = \lambda_1 \\ b = 2 \\ a-c = 3 \end{cases}$$

$$F(\mathbf{u_2}) = F\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \overset{b=2}{=} \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -5 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -a \\ -1 \\ -1-c \end{pmatrix} = \lambda_2\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_2 \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -a = \lambda_2 \\ -1 = \lambda_2 \\ -1-c = -\lambda_2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = -1 \\ a = -\lambda_2 = 1 \Longrightarrow \lambda_1 = 1+a = 2\ , \\ c = \lambda_2 - 1 = -2 \end{cases}$$

$$a = 1,\ b = 2,\ c = -2, \quad \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -1, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Återstår att bestämma ett ev. tredje egenvärde med tillhörande egenvektor. Bestäm sekularpolunomet och lös därefter sekularekvationen (Glöm inte bort att 2 och -1 skall vara lösningar).

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -2 & 3-\lambda & 2 \\ 4 & -5 & -2-\lambda \end{vmatrix} \overset{k_1+k_3}{=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 2 \\ 2-\lambda & -5 & -2-\lambda \end{vmatrix} \overset{r_3-r_1}{=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & -4 & -3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left((3-\lambda)(-3-\lambda)+8\right) = (2-\lambda)\left(\lambda^2 - 9 + 8\right) =$$

$$= (2-\lambda)\left(\lambda^2-1\right) = 0 \iff$$
$$\iff \lambda = 2, \pm 1.$$

Egenvärdena -1 och 2 med tillhörande egenvektorer känner vi sen tidigare så det återstår endast att bestämma egenvektorn till $\lambda = 1$.

$$\underline{\underline{\lambda = 1}}: \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & -5 & -3 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_3+2r_2 \\ -r_2/2 \\ r_2 \leftrightarrow r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_3-r_2 \\ -r_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow X_1 = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

4. Eftersom det linjära höljet av kolonnvektorerna i avbildningsmatrisen spänner upp $V(F)$ (se **Sats 7.5.4**, sid 181) börjar vi med att välja en bas i $V(F)$. Välj två icke-parallella vektorer i planet $x - 2y + z = 0$, t ex

$$\mathbf{u}_1 = (1,1,1) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = (1,0,-1) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bilda nu matrisen
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 1 & -1 & c \end{pmatrix}.$$

Oavsett val av $a, b, c \in \mathbb{R}$ blir $V(F)$ som minst det givna planet och som mest hela $\mathbb{R}^3$. Lyckas vi bestämma a, b, c så att $F(1,1,-1) = \mathbf{0} = (0,0,0)$ kommer $N(F)$ vara minst en-dimensionellt. Då $V(F)$ är minst två-dimensionellt ger dimensionssatsen att $\dim \mathbb{R}^3 = 3 = \dim V(F) + \dim N(F) \geq 2+1 = 3$, d v s $\dim V(F) = 2$ och $\dim N(F) = 1$ och därmed har F de efterfrågade egenskaperna. Återstår att bestämma a, b, c. Beräkning ger

$$F(1,1,-1) = F\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 1 & -1 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$
$$= \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2-a \\ 1-b \\ -c \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff a = 2, \quad b = 1, \quad c = 0$$

vilket ger att om F har avbildningsmatrisen
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

så kommer F att ha de efterfrågade egenskaperna.

5. Vi börjar med att bestämma en bas i $\mathbb{U}$ genom att, på matrisform lösa ekvationssystemet som definierar $\mathbb{U}$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{r_2-r_1}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{r_1-r_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5x_2+3x_3=-5s+3t \\ s \\ t \\ 3x_2-2x_3 = 3s-2t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad s,t \in \mathbb{R}.$$

Välj $\mathbf{f}_1=(3,0,1,-2)/\sqrt{14}$ och ortogonalisera $\mathbf{u}_2=(-5,1,0,3)$ m.h.a. Gram-Schmidt. Vi får

$$\mathbf{u}_{2_{\parallel \mathbf{f}_1}} = \frac{1}{14}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -\frac{21}{14}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_{2_{\perp \mathbf{f}_1}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{14}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Som utfyllnad väljer vi en bas i $\mathbb{U}$:s ortogonala komplement. Dessa är ju då per automatik ortogonala mot $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$ vilket underlättar beräkningen vi en ev. ortogonalisering. Om vi skriver de två definierande ekvationerna som skalärprodukter fås

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

ser vi att $\mathbb{U}$ kan beskrivas som

"alla vektorer ortogonala mot $(1,2,-1,1)$ och $(1,-1,1,2)$"

vilket innebär att

$$\mathbb{U}^{\perp} = [(1,2,-1,1),(1,-1,1,2)].$$

Vidare ser vi att $(1,2,-1,1)\bullet(1,-1,1,2) = 0$ så det räcker att normera dem för att vi skall få en ON-bas i $\mathbb{U}^{\perp}$. Vi väljer därför

$$\mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{7}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_4 = \frac{1}{\sqrt{7}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Då $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4$ är parvis ortogonala, av längd 1 och "rätt antal" är de en ON-bas i $\mathbb{U}$. Återstår att redovisa kontrollen av att detta stämmer. Då

$$|\mathbf{f}_1| = \frac{1}{\sqrt{14}}\sqrt{3^2+1^2+(-2)^2} = 1, \quad |\mathbf{f}_2| = \frac{1}{\sqrt{14}}\sqrt{(-1)^2+2^2+3^2} = 1,$$
$$|\mathbf{f}_3| = \frac{1}{\sqrt{7}}\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2+1^2} = 1, \quad |\mathbf{f}_4| = \frac{1}{\sqrt{7}}\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2+2^2} = 1$$

ser vi att de har rätt längd. Då vi kontrollerar ortogonaliteten kan vi strunta i normeringskonstanterna:

$$\mathbf{f}_1\bullet\mathbf{f}_2\text{: } \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\0\\1\\-2\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\0\end{pmatrix}=-3+3=0, \quad \mathbf{f}_1\bullet\mathbf{f}_3\text{: } \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\0\\1\\-2\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix}=3-1-2=0,$$
$$\mathbf{f}_1\bullet\mathbf{f}_4\text{: } \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\0\\1\\-2\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\2\end{pmatrix}=3+1-4=0, \quad \mathbf{f}_2\bullet\mathbf{f}_3\text{: } \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\0\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix}=-1+4-3=0,$$
$$\mathbf{f}_2\bullet\mathbf{f}_4\text{: } \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\0\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\2\end{pmatrix}=-1-2+3=0, \quad \mathbf{f}_3\bullet\mathbf{f}_4\text{: } \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\2\end{pmatrix}=1-2-1+2=0,$$

d v s den framtagna basen är en ON-bas i $\mathbb{R}^4$. Avslutningsvis tar vi genom bassambandet fram koordinaterna för $\mathbf{e}_1$ i den nya basen. Då $\underline{\mathbf{e}}$ och $\underline{\mathbf{f}}$ är ON-baser är transformationsmatrisen T en ON-matris, d v s $T^{-1} = T^t$ så att

$$\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}\,T = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3/\sqrt{14} & -1/\sqrt{14} & 1/\sqrt{7} & 1/\sqrt{7} \\ 0 & 2/\sqrt{14} & 2/\sqrt{7} & -1/\sqrt{7} \\ 1/\sqrt{14} & 3/\sqrt{14} & -1/\sqrt{7} & 1/\sqrt{7} \\ -2/\sqrt{14} & 0 & 1/\sqrt{7} & 2/\sqrt{7} \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \underline{\mathbf{e}} = (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3\ \mathbf{e}_4) = \underline{\mathbf{f}}\,T^t = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 3/\sqrt{14} & 0 & 1/\sqrt{14} & -2/\sqrt{14} \\ -1/\sqrt{14} & 2/\sqrt{14} & 3/\sqrt{14} & 0 \\ 1/\sqrt{7} & 2/\sqrt{7} & -1/\sqrt{7} & 1/\sqrt{7} \\ 1/\sqrt{7} & -1/\sqrt{7} & 1/\sqrt{7} & 2/\sqrt{7} \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \mathbf{e}_1 = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 3/\sqrt{14} \\ -1/\sqrt{14} \\ 1/\sqrt{7} \\ 1/\sqrt{7} \end{pmatrix}.$$

6. Skriv ekvationen på matrisform och beräkna sen egenvärden och egenvektorer till matrisen.

$$11x^2 + 4xy + 14y^2 = \left(11x^2 + 2xy\right) + \left(2xy + 14y^2\right) = x\,(11x + 2y) + y\,(2x + 14y) =$$

$$= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11x + 2y \\ 2x + 14y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 2 & 14 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 150,$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 11-\lambda & 2 \\ 2 & 14-\lambda \end{vmatrix} = (11-\lambda)(14-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 25\lambda + 150 =$$
$$= (\lambda - 10)(\lambda - 15) = 0 \iff \lambda = 10, 15,$$

$$\underline{\underline{\lambda = 10}} : \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \overset{r_2 - 2r_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_{10} = t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{\lambda = 15}} : \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_1 + 2r_2 \\ r_2 \leftrightarrow r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_{15} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}} T = \frac{1}{\sqrt{5}} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Byte till denna ON-bas av egenvektorer ger då att ekvationen blir

$$11x^2 + 4xy + 14y^2 = \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right] = 10y_1^2 + 15y_2^2 = 150 \iff$$
$$\frac{10y_1^2}{150} + \frac{15y_2^2}{150} = \frac{y_1^2}{15} + \frac{y_2^2}{10} = \left(\frac{y_1}{\sqrt{15}} \right)^2 + \left(\frac{y_2}{\sqrt{10}} \right)^2 = 1.$$

Följaktligen är storaxeln $\sqrt{15}$ lång längs riktningen $\mathbf{f}_1$. Punkterna P_{max} som ligger längst från origo har därmed avstånd $\sqrt{15}$ till origo och koordinaterna

$$y_1 = \pm\sqrt{15}, \; y_2 = 0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \overline{OP}_{max} = \pm \underline{\mathbf{f}} \begin{pmatrix} \sqrt{15} \\ 0 \end{pmatrix} = \pm\sqrt{15}\mathbf{f}_1 = \pm\sqrt{15} \frac{1}{\sqrt{5}} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \pm\sqrt{3}\, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

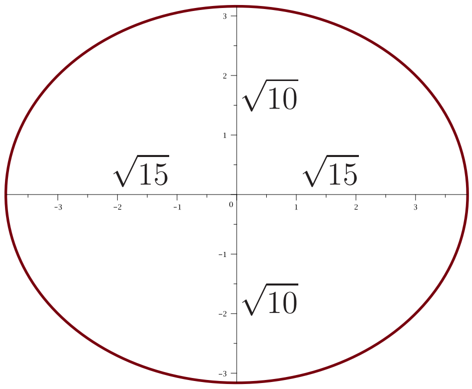
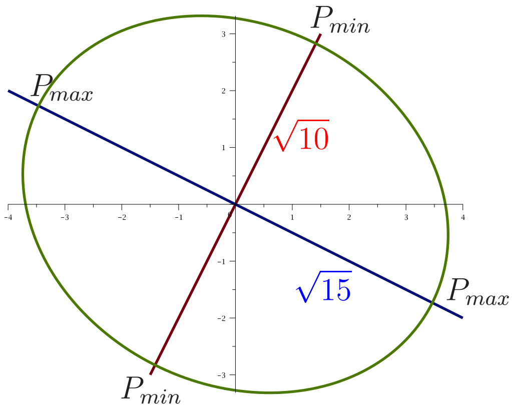
På samma sätt följer att lillaxeln $\sqrt{10}$ lång längs riktningen $\mathbf{f}_2$. Punkterna P_{min} som ligger närmast origo har därmed avstånd $\sqrt{10}$ till origo och koordinaterna

$$y_1 = 0, \; y_2 = \pm\sqrt{10} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \overline{OP}_{min} = \pm \underline{\mathbf{f}} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{10} \end{pmatrix} = \pm\sqrt{10}\mathbf{f}_2 = \pm\sqrt{10} \frac{1}{\sqrt{5}} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \pm\sqrt{2}\, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Slutligen, innan vi ritar kurvan beräknar vi skärningspunkterna med de ursprungliga koordinataxlarna:

$$\underline{\underline{x - \text{axeln}, \; y = 0}} : 11x^2 + 4x{\cdot}0 + 14{\cdot}0^2 = 11x^2 = 150 \iff x = \pm\sqrt{\frac{150}{11}} \approx 3,7$$
$$\underline{\underline{y - \text{axeln}, \; x = 0}} : 11{\cdot}0^2 + 4{\cdot}0{\cdot}y + 14y^2 = 14y^2 = 150 \iff y = \pm\sqrt{\frac{150}{14}} \approx 3,3.$$

Vi ritar upp ellipsen både i basen av egenvektorer och i den ursprungliga basen. Notera att den sökta figuren är en vridning av den i egenbasen. Då vi valt T så att T är en ON-matris med $\det T = 1$ är T avbildningsmatris för en vridning.

7. Vi börjar med att ta fram avbildningsmatrisen i standardbaserna i respektive rum. Enligt satsen om avbildningsmatrisen, **Sats 7.3.1**, sid 174 består kolonnerna av det som F gjort med basvektorerna i rummet vi startar i, uttryckt med den bas vi har i rummet vi landar i. Här startar vi i $\mathbb{P}_3$ och landar i $\mathbb{P}_2$ med standardbaserna $\underline{\mathbf{x}}_3 = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{pmatrix}$ och $\underline{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix}$. Vi får

$$
\begin{aligned}
F(p(x)) &= (-x^2+x-1)p'''(x) + (2x-3)p''(x) + 2p'(x) + (x^2-1)p(2),\\
p(x) &= 1 \Longrightarrow p(2) = 1, \quad p'(x) = p''(x) = p'''(x) = 0,\\
F(1) &= (-x^2+x-1)\cdot 0 + (2x-3)\cdot 0 + 2\cdot 0 + (x^2-1)p(2) = x^2 - 1 = \underline{\mathbf{x}}_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\\
p(x) &= x \Longrightarrow p(2) = 2, \quad p'(x) = 1, p''(x) = p'''(x) = 0,\\
F(x) &= (-x^2+x-1)\cdot 0 + (2x-3)\cdot 0 + 2\cdot 1 + (x^2-1)2 = 2 + 2x^2 - 2 = 2x^2 =\\
&= \underline{\mathbf{x}}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\\
p(x) &= x^2 \Longrightarrow p(2) = 4, \quad p'(x) = 2x, p''(x) = 2, p'''(x) = 0,\\
F(x^2) &= (-x^2+x-1)\cdot 0 + (2x-3)\cdot 2 + 2\cdot 2x + (x^2-1)4 =\\
&= 4x - 6 + 4x + 4x^2 - 4 = -10 + 8x + 4x^2 = \underline{\mathbf{x}}_2 \begin{pmatrix} -10 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix},\\
p(x) &= x^3 \Longrightarrow p(2) = 8, \quad p'(x) = 3x^2, p''(x) = 6x, p'''(x) = 6,\\
F(x^3) &= (-x^2+x-1)\cdot 6 + (2x-3)\cdot 6x + 2\cdot 3x^2 + (x^2-1)8 =\\
&= -6 + 6x - 6x^2 - 18x + 12x^2 + 6x^2 - 8 + 8x^2 =\\
&= -14 - 12x + 20x^2 = \underline{\mathbf{x}}_2 \begin{pmatrix} -14 \\ -12 \\ 20 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

vilket ger avbildningsmatrisen

$$
A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -10 & -14 \\ 0 & 0 & 8 & -12 \\ 1 & 2 & 4 & 20 \end{pmatrix}
$$

med avseende på standardbaserna i $\mathbb{P}_3$ och $\mathbb{P}_2$.
För att bestämma baser i $N(F)$ och $V(F)$ fortsätter vi på vanligt sätt genom att lösa $AX = 0$ och därefter med hjälp av lösningen till denna stryka löjliga element ur höljet av kolonnvektorerna.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 0 & -10 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -12 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 20 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{-(r_1+r_3) \\ r_2/4 \\ r_2 \leftrightarrow r_3}}{\sim} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 10 & 14 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2+3r_3 \\ r_1-5r_3}}{\sim} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 29 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29a_3 \\ 3a_3/2 \\ 3a_3/2 \\ 2t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -58 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow N(F) = \left[\underline{\mathbf{x}}_3 \begin{pmatrix} -58 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = \left[-58 + 3x + 3x^2 + 2x^3 \right],$$

d v s $-58 + 3x + 3x^2 + 2x^3$ är en bas i $N(F)$ och $\dim N(F) = 1$. Då $F\colon \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_2$ ger Dimensionssatsen, **Sats 7.5.6**, sid 182 att

$$\dim \mathbb{P}_3 = 4 = \dim V(F) + \dim N(F) = \dim V(F) + 1 \iff \dim V(F) = 4 - 1 = 3 = \dim \mathbb{P}_2$$

vilket ger att $V(F) = \mathbb{P}_2$. Som bas kan vi därför välja vilken som helst bas i $\mathbb{P}_2$, t ex standardbasen $1, x, x^2$ (eller tre kolonnvektorer i A).