Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Ulf Janfalk

Utbildningskod: TATA31
Modul: TEN1

Tentamen i Linjär algebra (TATA31/TEN1) 2022–01–09, 8–13.

Inga hjälpmedel, förutom passare, linjal eller gradskiva. OBS! Inga formler eller liknande tryckta på linjal eller gradskiva. Ej räknedosa.
För godkänt räcker 9 poäng och minst 3 uppgifter med 2 eller 3 poäng. Godkänd kontrollskrivning ($\geq$ 11p) ht2021 ger 3 poäng på uppgift 1 (som alltså inte behöver lösas) och 16p eller mer ger 4 poäng på uppgift 1. Markera detta genom att skriva "G" respektive "G+1" i rutan för uppgift 1.
Fullständiga motiveringar krävs. Lösningar läggs ut måndag 11/1 på

http://courses.mai.liu.se/GU/TATA31/tentor.html

Resultat meddelas via e-post inom 10 arbetsdagar.
Alla koordinater för vektorer och punkter är, om ej annat anges, givna med avseende på ett positivt orienterat ON-system, $\mathbb{R}^n$ är ett euklidiskt rum med standardskalärprodukten och standardbasen ett positivt orienterat ON-system.

1. Låt L_1 vara linjen genom punkterna $P_{11} = (2, 1, 0)$ och $P_{12} = (1, 0, 1)$ och låt L_2 vara linjen genom punkterna $P_{21} = (2, 6, 6)$ och $P_{22} = (0, 10, 4)$.

(1 p) (a) Ange ekvationer för L_1 respektive L_2 på parmeterform och visa att linjerna **inte** skär varann.

(1 p) (b) Ange ekvationen på normalform till det plan Π som innehåller L_1 och som ej skärs av L_2.

(1 p) (c) Bestäm avståndet mellan L_1 och L_2.

(3 p) 2. Lös nedanstående system av differential- respektive differensekvationer.

$$\begin{cases} x_1' = -8x_1 + 10x_2, & x_1(0) = 3 \\ x_2' = -5x_1 + 7x_2, & x_2(0) = -4 \end{cases}, \qquad \begin{cases} a_n = -8a_{n-1} + 10b_{n-1}, & a_0 = 3 \\ b_n = -5a_{n-1} + 7b_{n-1}, & b_0 = -4 \end{cases}.$$

(3 p) 3. Bestäm en ON-bas i

$$\mathbb{U} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \colon \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right\} \subset \mathbb{R}^4$$

och fyll sedan ut denna till en ON-bas i $\mathbb{R}^4$. För full poäng krävs att du redovisar de kontroller som krävs för att garantera att din angivna bas är en ON-bas i $\mathbb{R}^4$.

VÄND!

4. För den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_2$ gäller att

$$F(1) = 1 + x + x^2, \quad F(x) = -1 + x, \quad F(x^2) = 2 + x^2, \quad F(x^3) = 3 - x + x^2.$$

(2 p) (a) Ange F:s avbildningsmatris i standardbaserna i $\mathbb{P}_3$ och $\mathbb{P}_2$. Bestäm baser i noll- respektive värderummet samt ange deras respektive dimension. Alla basvektorer skall i svaret skrivas som ***polynom***.

(1 p) (b) Beräkna $F\left(4 + 3x + 2x^2 + x^3\right)$.

(3 p) 5. En parallellepiped har ett hörn i origo och de med origo förbundna hörnen har koordinaterna

$$(1, 2, 1),\ (2, -1, 3),\ (1, 1, 1).$$

Betrakta punkterna

$$P_1 = (2, 1, 5/2), \quad P_2 = (5/2, 2, 3), \quad P_3 = (11/2, 1/2, 15/2)$$

och avgör, för var och en av dem, om de ligger inuti eller utanför epipeden eller på någon av dess sidoytor (vilken behöver ej specificeras).

(3 p) 6. Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är en vridning med $(1, 2, 2)$ som vridningsaxel. Vridningsvinkeln är 90° moturs sett från toppen av $(1, 2, 2)$. Bestäm F:s matris i standardbasen.

(3 p) 7. Visa att ekvationen

$$8x_1^2 - 12x_1x_2 + 17x_2^2 - 60x_1 + 70x_2 + 105 = 0$$

definierar en ellips. Rita kurvan noggrant på ***separat papper*** (välj skala förnuftigt). Ange speciellt medelpunkt, halvaxellängder och symmetriaxlar.

Lösningsförslag till TATA31, Linjär algebra, 2022–01–09, fm

1. (a) Vi börjar riktningsvektorerna

$$\overline{P_{11}P}_{12} = \overline{OP}_{12} - \overline{OP}_{11} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} = -\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\overline{P_{21}P}_{22} = \overline{OP}_{22} - \overline{OP}_{21} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\10\\4\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\6\\6\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2\\4\\-2\end{pmatrix} = -2\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$L_1\colon\ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$L_2\colon\ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\6\\6\end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sätter vi de två uttrycken för linjerna lika fås (observera att vi här MÅSTE ha olika bokstäver för de olika parametrarna)

$$\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + s\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\6\\6\end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix}s-t\\s+2t\\-s-t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 2\\-1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-1\\6\\6-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\6\\5\end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \left(\begin{array}{cc|c}1 & -1 & 1\\1 & 2 & 6\\-1 & -1 & 5\end{array}\right) \overset{\substack{r_2-r_1\\r_3+r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c}1 & -1 & 1\\0 & 3 & 5\\0 & -2 & 6\end{array}\right)$$

vilket leder till att $t = \dfrac{5}{3}$ och $t = -3$, d v s systemet saknar lösning och därmed skär linjerna inte varann.

(b) Om linjen L_1 skall ligga i Π så är riktningsvektorn till L_1 ortogonal mot normalen till Π. På samma sätt, om L_2 inte skall skära Π måste även dess riktningsvektor vara ortogonal mot normalen till Π. Följaktligen är normalen till Π parallell med kryssprodukten av riktningsvektorerna. Vi får

$$\underline{\mathbf{e}}\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\\1\\1\end{array} \times \underline{\mathbf{e}}\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\\1\\-2\end{array} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix} = -\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \Pi\colon\ x + 2y + 3z = D, \quad P_{11} = (2, 1, 0) \in \Pi \Longrightarrow 2 + 2 + 0 = 4 = D$$

så $\Pi\colon\ x + 2y + 3z = 4$

(c) Då L_2 inte skär Π har alla punkter på L_2 samma avstånd till Π. Då L_1 och L_2 inte är parallella blir detta avstånd också avståndet mellan linjerna. Avståndet fås därmed genom att beräkna avståndet mellan, t ex $P_{21} = (2, 6, 6)$ och Π. Som punkt i planet väljer vi $P_{11} = (2, 1, 0)$ och får

$$\overline{P_{11}P_{21}} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$\overline{P_{11}P_{21}}_{\|\mathbf{n}} = \frac{1}{14} \left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{28}{14} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\text{Avståndet} = \left| \overline{P_{11}P_{21}}_{\|\mathbf{n}} \right| = 2\sqrt{14}.$$

2. Skriv systemen på matrisform.

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -8 & 10 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = AX,$$

$$X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} -8 & 10 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = AX_{n-1}.$$

Bestäm egenvärden och egenvektorer till A.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -8-\lambda & 10 \\ -5 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (-8-\lambda)(7-\lambda) + 50 = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \iff$$

$$\iff \lambda = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} = \frac{-1 \pm 5}{2} = -3, 2,$$

$$\underline{\underline{\lambda = -3}}: \quad \left(\begin{array}{cc|c} -5 & 10 & 0 \\ -5 & 10 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_{-3} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{\lambda = 2}}: \quad \left(\begin{array}{cc|c} -10 & 10 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\mathbf{f}_1 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Från den allmänna teorin om dessa ekvationstyper vet vi att lösningarna har formen

$$X(t) = B_1 \mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + B_2 \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_n = C_1(-3)^n\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 2^n\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Insättning av $t = 0$ respektive $n = 0$ ger samma system för båda och vi får

$$X(0) = B_1\mathrm{e}^0\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + B_2\mathrm{e}^0\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = B_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + B_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -11 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X(t) = 7\mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 11\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Då ekvationsssytemet för konstanterna är exakt detsamma för differensekvationen fås också

$$X_n = 7(-3)^n\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 11 \cdot 2^n\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Vi börjar med att bestämma en bas i $\mathbb{U}$ genom att lösa ekvationssystemet som definierar $\mathbb{U}$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{r_2-r_1}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{r_1+2r_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X = \begin{pmatrix} -3s-3t \\ s+2t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Sätt, t ex $\mathbf{u}_1 = (-3, 1, 1, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (-3, 2, 0, 1)$, $\mathbf{f}_1 = \widehat{\mathbf{u}}_1$ och ortogonalisera $\mathbf{u}_2$. Vi får

$$\mathbf{u}_{2_{\|\mathbf{f}_1}} = \frac{1}{11}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_{2_{\perp\mathbf{f}_1}} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \widehat{\mathbf{u}_{2_{\|\mathbf{f}_1}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_1 \bullet \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{11}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 + 1 + 0 - 1 = 0,$$

$$|\mathbf{f}_1| = \left|\frac{1}{\sqrt{11}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{\sqrt{11}}\sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 0^2 + 1^2} = \frac{1}{\sqrt{11}}\sqrt{11} = 1,$$

$$|\mathbf{f}_2| = \left|\frac{1}{\sqrt{3}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2 + (-1)1^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3} = 1,$$

d v s $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ är en ON-bas i $\mathbb{U}$.
Ekvationerna i $\mathbb{U}$ kan tolkas som skalärprodukter

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0,$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

vilket ger att $\mathbf{v}_3 = (1, 2, 1, -1)$ och $\mathbf{v}_4 = (1, 1, 2, 1)$ är en bas i $\mathbb{U}^\perp$. Sätt

$$\mathbf{f}_3 = \widehat{\mathbf{v}}_3 = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2 + 1^2}}\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{7}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v}_{4_{\|\mathbf{f}_3}} = \frac{1}{7}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{4}{7}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v}_{4_{\perp\mathbf{f}_3}} = \frac{1}{7}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{7}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_4 = \widehat{\mathbf{v}_{4_{\|\mathbf{f}_3}}} = \frac{1}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 10^2 + 11^2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{231}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_3 \bullet \mathbf{f}_4 = \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{\sqrt{231}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{\sqrt{231}}(3 - 2 + 10 - 11) = 0,$$

$$|\mathbf{f}_3| = \left|\frac{1}{\sqrt{7}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{\sqrt{7}}\sqrt{1 + 4 + 1 + 1} = 1,$$

$$|\mathbf{f}_4| = \left|\frac{1}{\sqrt{231}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{\sqrt{231}}\sqrt{9 + 1 + 100 + 121} = 1$$

vilket visar att $\mathbf{f}_3$ och $\mathbf{f}_4$ är en ON-bas i $\mathbb{U}^\perp$. För att verifiera att $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4$ är en ON-bas i $\mathbb{R}^4$ återstår nu endast att kontrollera att $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \perp \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4$

$$\mathbf{f}_1 \bullet \mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{11}} \cdot \frac{1}{\sqrt{7}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{11}} \cdot \frac{1}{\sqrt{7}}(-3 + 2 + 1 + 0) = 0$$

$$\mathbf{f}_2 \bullet \mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{7}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{7}}(0 + 2 - 1 - 1) = 0$$

$$\mathbf{f}_1 \bullet \mathbf{f}_4 = \frac{1}{\sqrt{11}} \cdot \frac{1}{\sqrt{231}} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{11}} \cdot \frac{1}{\sqrt{231}} (-9-1+10+0) = 0$$

$$\mathbf{f}_2 \bullet \mathbf{f}_4 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{231}} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{231}} (0-1-10+11) = 0$$

vilket fullbordar kontrollen av att den angivna basen är en ON-bas i $\mathbb{R}^4$.

4. (a) Beteckna standardbasen i $\mathbb{P}_3$ med $\underline{\mathbf{x}}_3 = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{pmatrix}$ och standardbasen i $\mathbb{P}_2$ med $\underline{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix}$. Därmed är de givna funktionsvärden det som bygger upp F:s matris i de givna baserna. Skriver vi på bas·koordinatform så fås

$$F(1) = F\left(\underline{\mathbf{x}}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 1 + x + x^2 = \underline{\mathbf{x}}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$F(x) = F\left(\underline{\mathbf{x}}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = -1 + x = \underline{\mathbf{x}}_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$F(x^2) = F\left(\underline{\mathbf{x}}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 2 + x^2 = \underline{\mathbf{x}}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$F(x^3) = F\left(\underline{\mathbf{x}}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 3 - x + x^2 = \underline{\mathbf{x}}_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\iff A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi börjar med nollrumsekvationen $F(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) = \mathbf{0}$, d v s lös $AX = 0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2 - 2r_3 \\ r_3 \leftrightarrow r_2}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{r_1 + r_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_2 - a_3 = -s - t \\ a_2 + 2a_3 = s + 2t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}, \quad \text{d v s}$$

$$\mathbf{q}_1 = \underline{\mathbf{x}}_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 + x + x^2, \quad \mathbf{q}_2 = \underline{\mathbf{x}}_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 + 2x + x^3$$

är en bas i $N(F)$ vilket ger $\dim N(F)$=2.
Enligt **Sats 7.5.4**, sid 181 är $V(F) = \left[F(1), F(x), F\left(x^2\right), F\left(x^3\right)\right]$. För att bestämma en bas behöver vi stryka "löjliga element", se **Sats 5.3.16**, sid 111. Då beroendeekvationen för dessa är den ekvation vi precis löst följer det att

$$\begin{aligned} -F(1) + F(x) + F\left(x^2\right) + 0 \cdot F\left(x^3\right) = \mathbf{0} &\iff F(1) - F(x) = F\left(x^2\right) \\ -F(1) + 2F(x) + 0 \cdot F\left(x^2\right) + F\left(x^3\right) = \mathbf{0} &\iff F(1) - 2F(x) = F\left(x^3\right), \end{aligned}$$

d v s $F(x^2)$ och $F(x^3)$ kan utses till löjliga element. Följaktligen är

$$F(1) = 1 + x + x^2, \quad F(x) = -1 + x \quad \text{en bas i } V(F)$$

som därmed har dimension 2 (vilket också följer ur dimensionssatsen, **Sats 7.5.6**, sid 182, $\dim \mathbb{P}_3 = 4 = 2 + 2 = \dim N(F) + \dim V(F)$).

(b) Med hjälp av avbildningsmatrisen fås

$$F\left(4 + 3x + 2x^2 + x^3\right) = F\left(\underline{\mathbf{x}}_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \underline{\mathbf{x}}_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{\mathbf{x}}_2 \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = 8 + 6x + 7x^2.$$

5. Byt bas till en där epipedens kantvektorer är basvektorerna, t ex

$$\mathbf{f}_1 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_3 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Detta innebär att de till origo angränsande hörnen, i den nya basen, får koordinaterna $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ och att epipedens begränsningsplan blir sammanfallande eller parallella med koordinatplanen. Därmed får begränsningsplanen, i den nya basen, ekvationerna

$$\begin{aligned} y_1 &= 0, \quad & y_2 &= 0, \quad & y_3 &= 0, \\ y_1 &= 1, \quad & y_2 &= 1, \quad & y_3 &= 1. \end{aligned}$$

Därför, om vi har en punkt uttryckt i den nya basen så följer det att den ligger

- inuti epipeden om dess koordinater är strikt mellan 0 och 1,
- utanför epipeden om någon koordinat är strikt negativ eller strikt större än 1,
- på någon av epipedens sidoytor eller kanter om alla koordinater är mellan 0 och 1 och minst en är 0 eller 1.

Bestäm därför koordinaterna för P_1, P_2, P_3 i den nya basen. Bassambandet ger

$$\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}T = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \iff \underline{\mathbf{e}} = \underline{\mathbf{f}}\,T^{-1} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \mathbf{u} = \underline{\underline{\underline{\mathbf{f}}\,X_{\underline{\mathbf{f}}}}} = \underline{\mathbf{e}}\,X_{\underline{\mathbf{e}}} = (\underline{\mathbf{f}}\,T^{-1})X_{\underline{\mathbf{e}}} = \underline{\underline{\underline{\mathbf{f}}\left(T^{-1}X_{\underline{\mathbf{e}}}\right)}} \iff X_{\underline{\mathbf{f}}} = T^{-1}X_{\underline{\mathbf{e}}}.$$

Då vi skall bestämma nya koordinater för tre punkter bestämmer vi T^{-1}. Den vanliga uppställningen för beräkning av inversen ger

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2+5r_3 \\ r_3 \leftrightarrow r_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & 1 & 5 \end{array}\right) \overset{\substack{r_1-r_3 \\ -r_3}}{\sim}$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -6 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -1 & -5 \end{array}\right) \overset{r_1-2r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -1 & -5 \end{array}\right) \Longrightarrow T^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 7 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Vi får

$$\overline{OP}_1 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5/2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{f}}\,T^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 7 & -1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$\overline{OP}_2 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 5/2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 7 & -1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix},$$
$$\overline{OP}_3 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 11/2 \\ 1/2 \\ 15/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 7 & -1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 15 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Detta ger att

- P_1 ligger inuti epipeden då alla dess koordinater är strikt mellan 0 och 1,
- P_2 ligger på en av epipedens sidoytor eftersom alla koordinater är mellan 0 och 1 och en är 1.
- P_3 ligger utanför epipeden eftersom en koordinat är strikt större än 1.

6. I "rätt bas"= en högerorienterad ON-bas där $\mathbf{f}_1$ är en enhetsvektor i samma riktning som vridningsaxeln, har en vridning avbildningsmatrisen (se **Exempel 7.3.7**, sid 177)

$$A_{\underline{\mathbf{f}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

d v s om vi, t ex väljer

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_3 = \mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2 = \frac{1}{3^2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\times\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3^2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}6\\3\\-6\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{array}$$

så är $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ en högerorienterad ON-bas och

$$\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}\,\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}.$$

Då standardbasen och $\underline{\mathbf{f}}$ är ON-baser är T en ON-matris så att $T^{-1} = T^t$. Här är dessutom $T^t = T$. Med $\theta = 90^\circ$ moturs, d v s $+90^\circ$ fås att

$$A_f = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}, \quad A_{\underline{\mathbf{e}}} = TA_{\underline{\mathbf{f}}}T^{-1} = TA_{\underline{\mathbf{f}}}T^t = \frac{1}{3}T\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3^2}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ -2 & -1 & 2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & -4 & 8\\ 8 & 4 & 1\\ -4 & 7 & 4\end{pmatrix}.$$

7. Börja med att skriva på matrisform.

$$8x_1^2 - 12x_1x_2 + 17x_2^2 - 60x_1 + 70x_2 + 105 =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix}x_1 & x_2\end{pmatrix}}_{X_{\underline{\mathbf{e}}}^t}\underbrace{\begin{pmatrix}8 & -6\\ -6 & 17\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}}_{X_{\underline{\mathbf{e}}}} + 10\begin{pmatrix}-6 & 7\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}}_{X_{\underline{\mathbf{e}}}} + 105.$$

Betrakta $A_{\underline{\mathbf{e}}}$ som avbildningsmatris till en linjär avbildning $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ och bestäm en ON-bas av egenvektorer till F.

$$\begin{vmatrix}8-\lambda & -6\\ -6 & 17-\lambda\end{vmatrix} = (8-\lambda)(17-\lambda) - 36 = \lambda^2 - 25\lambda + 100 =$$

$$= (\lambda - 5)(\lambda - 20) = 0 \iff \lambda = 5, 20,$$

$$\underline{\underline{\lambda = 5}}:\quad \left(\begin{array}{cc|c}3 & -6 & 0\\ -6 & 12 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right) \Longrightarrow X_5 = t\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\underline{\underline{\lambda = 20}}:\quad \left(\begin{array}{cc|c}-12 & -6 & 0\\ -6 & -3 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right) \Longrightarrow X_{20} = t\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}\,\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}, \quad X_{\underline{\mathbf{e}}} = TX_{\underline{\mathbf{f}}}.$$

Då egenvärdena är positiva är kurvan en ellips. Byte till denna ON-bas av egenvektorer ger

$$8x_1^2 - 12x_1x_2 + 17x_2^2 - 60x_1 + 70x_2 + 105 = X_{\underline{\mathbf{e}}}{}^t A_{\underline{\mathbf{e}}} X_{\underline{\mathbf{e}}} + 10\begin{pmatrix}-6 & 7\end{pmatrix} X_{\underline{\mathbf{e}}} + 105 =$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[X_{\underline{\mathbf{e}}} = T X_{\underline{\mathbf{f}}} \right] = (T X_{\underline{\mathbf{f}}})^t A_{\underline{\mathbf{e}}} T X_{\underline{\mathbf{f}}} + 10 \begin{pmatrix} -6 & 7 \end{pmatrix} T X_{\underline{\mathbf{f}}} + 105 = \\
&= X_{\underline{\mathbf{f}}}{}^t \underbrace{T^t A_{\underline{\mathbf{e}}} T}_{A_{\underline{\mathbf{f}}}} X_{\underline{\mathbf{f}}} + \frac{10}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + 105 = \\
&= 5y_1^2 + 20y_2^2 + 2\sqrt{5} \begin{pmatrix} -5 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \\
&= 5y_1^2 + 20y_2^2 + 2\sqrt{5}(-5y_1 + 20y_2) + 105 = \\
&= 5\left(y_1^2 - 2\sqrt{5}y_1\right) + 20\left(y_2^2 + 2\sqrt{5}\right) + 105 = \\
&= 5\left(\left(y_1 - \sqrt{5}\right)^2 - 5\right) + 20\left(\left(y_2 + \sqrt{5}\right)^2 - 5\right) + 105 = \\
&= 5\left(y_1 - \sqrt{5}\right)^2 + 20\left(y_2 + \sqrt{5}\right)^2 - 20 = 0 \iff \\
&\iff \frac{\left(y_1 - \sqrt{5}\right)^2}{4} + \left(y_2 + \sqrt{5}\right)^2 = \left(\frac{y_1 - \sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(y_2 + \sqrt{5}\right)^2 = 1.
\end{aligned}
$$

Ur ovanstående kalkyler utläser vi att medelpunkten M har ortsvektor

$$
\begin{aligned}
\overline{OM} &= \underline{\mathbf{f}} \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix} = \left[\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}} T \right] = \underline{\mathbf{e}} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \\
&= \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

att storaxeln är 2 längdenheter lång och parallell med y_1-axeln, d v s parallell med $\mathbf{f}_1$ i det ursprungliga x_1x_2-systemet samt att lillaxeln är 1 längdenhet lång och parallell med y_2-axeln, d v s parallell med $\mathbf{f}_2$ i det ursprungliga x_1x_2-systemet. Vi får därmed följande figurer i y_1y_2- och x_1x_2-systemen.