Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Ulf Janfalk

**Utbildningskod: TATA31**
**Modul: TEN1**

# Tentamen i Linjär algebra (TATA31/TEN1) 2022–03–15, 8–13.

**Inga hjälpmedel, förutom passare, linjal eller gradskiva. OBS! Inga formler eller liknande tryckta på linjal eller gradskiva. Ej räknedosa.**
För godkänt räcker 9 poäng och minst 3 uppgifter med 2 eller 3 poäng. Godkänd kontrollskrivning ($\geq$ 11p) ht2021 ger 3 poäng på uppgift 1 (som alltså inte behöver lösas) och 16p eller mer ger 4 poäng på uppgift 1. Markera detta genom att skriva ”G” respektive ”G+1” i rutan för uppgift 1.
**Fullständiga motiveringar krävs.** Lösningar läggs ut onsdag 16/3 på

http://courses.mai.liu.se/GU/TATA31/tentor.html

Resultat meddelas via e-post inom 10 arbetsdagar.
**Alla koordinater för vektorer och punkter är, om ej annat anges, givna med avseende på ett positivt orienterat ON-system, $\mathbb{R}^n$ är ett euklidiskt rum med standardskalärprodukten och standardbasen ett positivt orienterat ON-system.**

1. Låt $P_1 = (1,1,1)$, $P_2 = (2,0,0)$, $P_3 = (-1,0,2)$. Bestäm,

(1 p) (a) på parmeterform, linjen $L$ som går genom $P_1$ och $P_2$. Avgör om punkten $(0,2,2)$ ligger på $L$ eller inte.

(1 p) (b) på normalform, ekvationen till planet $\Pi_1$ som innehåller $P_1$, $P_2$ och $P_3$. Avgör om punkten $(1,0,-2)$ ligger i $\Pi$ eller inte.

(1 p) (c) på normalform, ekvationen till ett plan som har avstånd 2 till planet $\Pi_1$. (Finns två men det räcker att du ger ekvationen för ett av dem.)

2. Den linjära avbildningen $F\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ har i standardbaserna avbildningsmatrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Den linjära avbildningen $F^*\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ har i standardbaserna avbildningsmatrisen $A^t$. Bestäm avbildningsmatriserna till sammansättningarna $F\circ F^*$ respektive $F^*\circ F$. Ange också egenvärden och egenvektorer till $F\circ F^*$ respektive $F^*\circ F$.

3. För den linjära avbildningen $F\colon\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ gäller att

$$F(1,0,0,0) = (1,1,1), \quad F(0,1,0,0) = (2,-1,0),$$
$$F(0,0,1,0) = (3,0,1), \quad F(0,0,0,1) = (0,3,2).$$

(1 p) (a) Ange $F$:s avbildningsmatris i standardbaserna i $\mathbb{R}^4$ och $\mathbb{R}^3$.

(2 p) (b) Bestäm $a \in \mathbb{R}$ så att $\mathbf{v} = (4,1,a) \in V(F)$ och ange därefter, för detta värde på $a$, ***alla*** $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$ sådana att $F(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$.

**VÄND!**

4. Låt $\mathbf{v} = (1, 1, 2, 1, 1) \in \mathbb{R}^5$ och betrakta underrummet

$$\mathbb{U} = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \colon \begin{array}{l} x_1 \qquad + \quad x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{array} \right\} \subset \mathbb{R}^5.$$

Bestäm en ON-bas i $\mathbb{U}$ och fyll ut den till en ON-bas i $\mathbb{R}^5$. Bestäm därefter vektorer $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{U}$ och $\mathbf{v}_2 \perp \mathbb{U}$ så att $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$. För full poäng krävs att du ***redovisar*** kontrollerna som krävs för att garantera att $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{U}$ och $\mathbf{v}_2 \perp \mathbb{U}$.

5. Låt $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ och betrakta den kvadratiska formen

$$Q(\mathbf{u}) = 2x_1^2 + 10x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 8x_3^2.$$

(1 p) (a) Betrakta ytan som definieras av att $Q(\mathbf{u}) = -1$. Ange de punkter på ytan som ligger närmast origo samt vilket detta minsta avstånd är.

(2 p) (b) Bestäm det största respektive minsta värde som $Q(\mathbf{u})$ kan anta då $|\mathbf{u}| = \sqrt{3}$ samt i vilka punkter de antas.

6. Den linjära avbildningen $F \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har i standardbasen matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & a \\ 8 & b & 4 \\ c & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

där $a, b, c$ är reella tal. Bestäm $a, b, c$ så att vektorerna

$$\mathbf{u}_1 = (1, 2, 1) \quad \text{och} \quad \mathbf{u}_2 = (-1, 0, 2)$$

blir egenvektorer till $F$ samt ange deras respektive egenvärden.

7. Avbildningen $F \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har i standardbasen avbildningsmatrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vad gör $F$ med vektorerna i $\mathbb{R}^3$?

# Lösningsförslag till TATA31, Linjär algebra, 2022–03–15, fm

1. (a) Bestäm riktningsvektorn $\mathbf{v}$ till $L$.

$$\mathbf{v} \parallel \overline{P_1P_2} = \overline{OP}_2 - \overline{OP}_1 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Väljer vi $P_2$ som utgångspunkt fås

$$L\colon\ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Punkten $(0,2,2) \in L$ om

$$\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

för något $t$. Då vi ser att så är fallet om $t = 2$ ligger alltså $(0,2,2)$ på $L$.

(b) Bestäm $\overline{P_1P_3}$ och beräkna sedan normalen $\mathbf{n}_1$ till $\Pi_1$ genom kryssprodukten av $\overline{P_1P_2}$ och $\overline{P_1P_3}$.

$$\overline{P_1P_3} = \overline{OP}_3 - \overline{OP}_1 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{n}_1 \parallel \overline{P_1P_2} \times \overline{P_1P_3} = \underline{\mathbf{e}}\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ 1 \\ -1 \end{array} \times \underline{\mathbf{e}}\begin{array}{c} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ -2 \\ -1 \end{array} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \Pi_1\colon\ 2x - y + 3z = D_1.$$

Insättning av, t ex $P_2$ och kontroll med $P_1$ och $P_3$ ger

$$\underline{\underline{P_2 \in \Pi_1}} : 2\cdot 2 - 0 + 3\cdot 0 = 4 = D_1$$

$$\underline{\underline{P_1 \in \Pi_1}} : 2\cdot 1 - 1 + 3\cdot 1 = 4, \qquad \underline{\underline{P_3 \in \Pi_1}} :\ 2\cdot(-1) - 0 + 3\cdot 2 = 4$$

så att $\qquad 2x - y + 3z = 4.$

Insättning av $(1,0,-2)$ i $\Pi$:s ekvation ger

$$2 - 0 - 6 = -4 \neq 4$$

så $(1,0,-2)$ ligger inte i $\Pi$.

(c) Då planet skall ha avstånd 2 till $\Pi_1$ följer att de är parallella. Följaktligen har de samma normalvektor och därmed samma högerled i ekvationen på normalform, d v s endast konstanten skiljer dem åt och $\Pi_2$: $2x-y+3z = D_2$. För att bestämma $D_2$ behöver vi hitta en punkt i det sökta planet vilket enklast görs om vi till ortsvektorn för en punkt, vilken som helst, i $\Pi_1$ adderar (eller subtraherar) $2\widehat{\mathbf{n}}_1$. Om vi, t ex utgår från $P_2$ så fås ortsvektorn till en punkt

$$\overline{OP}_4 = \overline{OP}_2 + 2\widehat{\mathbf{n}}_1 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 4\sqrt{14}+4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

som tillhör ett plan $\Pi_2$ med den sökta egenskapen, avstånd 2 till $\Pi_1$. Insättning av $P_4$ ger

$$D_2 = \frac{1}{\sqrt{14}}(2(4\sqrt{14}+4) - (-2) + 3\cdot 6) = \frac{28+4\sqrt{14}}{\sqrt{14}} = 2\sqrt{14}+4 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \Pi_2\colon\ 2x - y + 3z = 2\sqrt{14}+4.$$

2. Enligt **Sats 7.6.2**, sid 186 har $F\circ F^*$ avbildningsmatris $AA^t$ och $F^*\circ F$ har avbildningsmatris $A^tA$. Vi får

$$AA^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$
$$A^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vi börjar med $A^tA$.

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(3-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 9\lambda + 14 =$$
$$= (\lambda-7)(\lambda-2) = 0 \iff \lambda = 2, 7,$$
$$\underline{\underline{\lambda = 2}}:\ \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_2 = t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R}$$
$$\underline{\underline{\lambda = 7}}:\ \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_7 = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R},$$

d v s $F^*\circ F$ har egenvärdena 2 och 7 med egenvektorer $(-1,2)$ respektive $(2,1)$. Motsvarande kalkyl för $AA^t$ blir

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 5-\lambda & 3 \\ 0 & 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{r_3-3r_1}{=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 5-\lambda & 3 \\ -3(2-\lambda) & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{k_1+3k_3}{=} (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 10 & 5-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 10 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)((2-\lambda)(5-\lambda) - 10) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda) =$$
$$= \lambda(2-\lambda)(\lambda-7) = 0 \iff \lambda = 0, 2, 7,$$
$$\underline{\underline{\lambda = 0}}:\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{r_1\leftrightarrow r_2}{\overset{r_1-2r_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -9 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{r_2\leftrightarrow r_3}{\overset{r_2+3r_3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X_0 = t\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R},$$

$$\underline{\underline{\lambda=2}}:\quad \left(\begin{array}{ccc|c}0&1&0&0\\1&3&3&0\\0&3&0&0\end{array}\right) \overset{\substack{r_3-3r_1\\ r_1\leftrightarrow r_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c}1&3&3&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right) \Longrightarrow X_2 = t\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R},$$

$$\underline{\underline{\lambda=7}}:\quad \left(\begin{array}{ccc|c}-5&1&0&0\\1&-2&3&0\\0&3&-5&0\end{array}\right) \overset{\substack{r_1-5r_2\\ r_1\leftrightarrow r_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&3&0\\0&-9&15&0\\0&3&-5&0\end{array}\right) \overset{\substack{r_2+3r_3\\ r_2\leftrightarrow r_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&3&0\\0&3&-5&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow X_7 = t\begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R},$$

d v s $F\circ F^*$ har egenvärdena 0, 2 och 7 med egenvektorer $(1,-2,3)$, $(-3,0,1)$ respektive $(1,5,3)$.

**Anmärkning:**

I. Hittar man inte de radoperationer man behöver för att faktorisera ut $2-\lambda$ går det bra att kofaktorutveckla efter, t ex rad 1. Då fås

$$\begin{vmatrix}2-\lambda&1&0\\1&5-\lambda&3\\0&3&2-\lambda\end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix}5-\lambda&3\\3&2-\lambda\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}1&3\\0&2-\lambda\end{vmatrix} =$$
$$= (2-\lambda)((5-\lambda)(2-\lambda)-9)-(2-\lambda) =$$
$$= (2-\lambda)((5-\lambda)(2-\lambda)-9-1) = (2-\lambda)\left(\lambda^2-7\lambda\right) =$$
$$= \lambda(2-\lambda)(\lambda-7).$$

II. Observera att $F\circ F^*$ och $F^*\circ F$ har samma nollskilda egenvärden, här 2 och 7. Att de nollskilda egenvärden blir lika för $F\circ F^*$ och $F^*\circ F$ gäller alltid för alla linjära avbildningar $F\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$.

3. (a) Beteckna standardbasen i $\mathbb{R}^4$ med $\underline{\mathbf{e}}_4$ och standardbasen i $\mathbb{R}^3$ med $\underline{\mathbf{e}}_3$. Därmed är de givna funktionsvärden det som bygger upp $F$:s matris i de givna baserna. Skriver vi på bas·koordinatform så fås

$$F(1,0,0,0) = F\left(\underline{\mathbf{e}}_4\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right) = (1,1,1) = \underline{\mathbf{e}}_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$F(0,1,0,0) = F\left(\underline{\mathbf{e}}_4\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = (2,-1,0) = \underline{\mathbf{e}}_3\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix},$$

$$F(0,0,1,0) = F\left(\underline{\mathbf{e}}_4\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = (3,0,1) = \underline{\mathbf{e}}_3\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$F(0,0,0,1) = F\left(\underline{\mathbf{e}}_4\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = (0,3,2) = \underline{\mathbf{e}}_3\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix},$$

$$\iff A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\1 & -1 & 0 & 3\\1 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

(b) En vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ tillhör $V(F)$ om den är ett *funktionsvärde*, d v s om det finns en vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$ så att $F(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$. Vi får ekvationssystemet

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4) = \underline{\mathbf{e}}_3\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\1 & -1 & 0 & 3\\1 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}_3\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

Vi behandlar båda frågorna samtidigt och studerar ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 3 & 0 & 4\\1 & -1 & 0 & 3 & 1\\1 & 0 & 1 & 2 & a\end{array}\right) \overset{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 3 & 0 & 4\\0 & -3 & -3 & 3 & -3\\0 & -2 & -2 & 2 & -4+a\end{array}\right) \overset{r_2/(-3)}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 3 & 0 & 4\\0 & 1 & 1 & -1 & 1\\0 & -2 & -2 & 2 & -4+a\end{array}\right) \overset{\substack{r_1-2r_2\\r_3+2r_2}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 1 & 2 & 2\\0 & 1 & 1 & -1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & -2+a\end{array}\right).$$

Ovanstående ger då att systemet är lösbart omm $a = 2$, d v s $\mathbf{v} = (4,1,a) \in V(F)$ omm $a = 2$. Insättning av $a = 2$ ger

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 1 & 2 & 2\\0 & 1 & 1 & -1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2+s-2t\\1+s+t\\-s\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad s,t \in \mathbb{R}, \text{ d v s}$$

$$\mathbf{u} = (2,1,0,0) + s(1,1,-1,0) + t(-2,1,0,1), \quad s,t \in \mathbb{R}$$

ger alla de vektorer sådana att $F(\mathbf{u}) = (4,1,2)$.

4. Vi börjar med att bestämma en bas i $\mathbb{U}$ genom att lösa det definierande ekvationssystemet.

$$\begin{cases} x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 + x_4 + x_5 = 0\\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0\end{cases} \iff \left(\begin{array}{ccccc|c}1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0\end{array}\right) \overset{r_2-r_1}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c}1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\0 & 1 & -2 & 0 & -2 & 0\end{array}\right) \Longrightarrow \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-r-s-t\\2r+2t\\r\\s\\t\end{pmatrix} =$$

$$= r\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\0\\1\end{pmatrix},\quad r,s,t\in\mathbb{R}.$$

Välj en av ovanstående, normera den och ortogonalisera de andra två i enlighet med Gram-Schmidtprocessen. Vi sätter

$$\mathbf{u}_1=(-1,0,0,1,0),\quad \mathbf{u}_2=(-1,2,1,0,0),\quad \mathbf{u}_3=(-1,2,0,0,1),$$

$$\mathbf{f}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{u}_{2_{\|\mathbf{f}_1}}=(\mathbf{u}_2\bullet\mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1=\frac{1}{2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_{2_{\perp\mathbf{f}_1}}=\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_{2_{\|\mathbf{f}_1}}=\frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2\\4\\2\\0\\0\end{pmatrix}-\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\4\\2\\-1\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{f}_2=\frac{1}{\sqrt{22}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\4\\2\\-1\\0\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_{3_{\|[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}}=(\mathbf{u}_3\bullet\mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1+(\mathbf{u}_3\bullet\mathbf{f}_2)\,\mathbf{f}_2=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\0\\1\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{22}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\0\\1\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\4\\2\\-1\\0\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\4\\2\\-1\\0\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{9}{22}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\4\\2\\-1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{22}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-11\\0\\0\\11\\0\end{pmatrix}+\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-9\\36\\18\\-9\\0\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{22}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-20\\36\\18\\2\\0\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{11}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-10\\18\\9\\1\\0\end{pmatrix}\Longrightarrow \mathbf{u}_{3_{\perp[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}}=\mathbf{u}_3-\mathbf{u}_{3_{\|[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}}=\frac{1}{11}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-11\\22\\0\\0\\11\end{pmatrix}-\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-10\\18\\9\\1\\0\end{pmatrix}\right)=$$

$$=\frac{1}{11}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\4\\-9\\-1\\11\end{pmatrix},\quad \left|\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\4\\-9\\-1\\11\end{pmatrix}\right|=\sqrt{(-1)^2+4^2+(-9)^2+(-1)^2+11^2}=\sqrt{220},$$

$$\mathbf{f}_3=\frac{1}{\sqrt{220}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\4\\-9\\-1\\11\end{pmatrix}$$

så $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ enligt ovan är en ON-bas i $\mathbb{U}$. För att hitta utfyllnaden använder vi en bas till $\mathbb{U}^\perp$. Om vi tolkar ekvationerna i det tdefinierande ekvationssystemet som skalärprodukter följer det att

$$\begin{aligned}
\mathbb{U} &= \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \colon \begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & - & x_5 & = 0 \end{array} \right\} = \\
&= \left\{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^5 \colon \mathbf{u} \bullet (1,0,1,1,1) = \mathbf{u} \bullet (1,1,-1,1,-1) = 0 \right\} \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow \mathbb{U}^\perp = [\underset{\mathbf{u}_4}{(1,0,1,1,1)}, \underset{\mathbf{u}_5}{(1,1,-1,1,-1)}].
\end{aligned}$$

Då $\mathbf{u}_4 \bullet \mathbf{u}_5 = 0$ räcker det att normera dem för att vi skall ha en ON-bas i $\mathbb{U}^\perp$, d v s

$$\mathbf{f}_4 = \widehat{\mathbf{u}}_4 = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_5 = \widehat{\mathbf{u}}_5 = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

är en ON-bas i $\mathbb{U}^\perp$. Då $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_5$ är en ON-mängd med rätt antal element utgör de en ON-bas i $\mathbb{R}^5$. Återstår att bestämma ortogonaluppdelningen av $\mathbf{v}$. Då $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{U}$ och $\mathbf{v}_2 \in \mathbb{U}^\perp$ följer det att $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}$ och $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}^\perp}$. Då $\dim \mathbb{U} = 3$ och $\dim \mathbb{U}^\perp = 2$ blir det enklast att beräkna $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}^\perp}$ med projektionsformeln (**Sats 6.3.9**, sid 146) och sen beräkna $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}^\perp}$. Vi får

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}^\perp} = (\mathbf{v} \bullet \mathbf{f}_4)\, \mathbf{f}_4 + (\mathbf{v} \bullet \mathbf{f}_5)\, \mathbf{f}_5 = \\
&= \frac{1}{4}\left( \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\left( \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{5}{4}\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{v}_1 &= \frac{1}{4}\left( \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{4}\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

**Kontroller**: Att $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{U}$ kontrolleras genom insättning i det definierande ekvationssystemet och att $\mathbf{v}_2 \perp \mathbb{U}$ genom att kontrollera att skalärprodukterna med basvektorerna är 0 (vilken av baserna spelar ingen roll).

$$\underline{\underline{\mathbf{v}_1 \in \mathbb{U}}} : \quad \begin{array}{rcrcrcrcrl} -1 & & & + & 3 & + & (-1) & + & (-1) & = 0 \\ -1 & + & 4 & - & 3 & + & (-1) & - & (-1) & = 0 \end{array} \quad \surd,$$

$$\underline{\underline{\mathbf{v}_2 \perp \mathbb{U}}} : \quad \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 + 0 + 1 + 0 + 0 = 0, \quad \surd$$

$$\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = -1+0+0+1+0=0, \ \surd$$

$$\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\0\\1\end{pmatrix} = -1+0+0+0+1=0 \ \surd$$

vilket visar att $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ har de efterfrågade egenskaperna.

5. Skriv på matrisform och beräkna egenvärdena till $Q$:s matris.

$$Q(\mathbf{u}) = 2x_1^2 + 10x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 8x_3^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5 & -1\\5 & 2 & -1\\-1 & -1 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = X^tAX,$$

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix}2-\lambda & 5 & -1\\5 & 2-\lambda & -1\\-1 & -1 & 8-\lambda\end{vmatrix} \overset{r_2-r_1}{=} \begin{vmatrix}2-\lambda & 5 & -1\\3+\lambda & -3-\lambda & 0\\-1 & -1 & 8-\lambda\end{vmatrix} \overset{k_1+k_2}{=}$$

$$= \begin{vmatrix}7-\lambda & 5 & -1\\0 & -3-\lambda & 0\\-2 & -1 & 8-\lambda\end{vmatrix} = -(3+\lambda)\begin{vmatrix}7-\lambda & -1\\-2 & 8-\lambda\end{vmatrix} =$$

$$= -(3+\lambda)((7-\lambda)(8-\lambda)-2) = -(3+\lambda)\left(\lambda^2-15\lambda+54\right) =$$

$$= -(3+\lambda)\left(\lambda^2-(6+9)\lambda+6\cdot 9\right) = -(\lambda+3)(\lambda-6)(\lambda-9) = 0 \iff$$

$$\iff \lambda = -3, 6, 9.$$

I båda deluppgifterna bygger resonemanget på **Sats 9.1.11**, sid 227 som säger

$$\lambda_{\min}|\mathbf{u}|^2 \le Q(\mathbf{u}) \le \lambda_{\max}|\mathbf{u}|^2$$

med likhet endast då $\mathbf{u}$ = egenvektor till egenvärdet $\lambda_{\min}$ resp till egenvärdet $\lambda_{\max}$. Det räcker alltså att beräkna egenvektorerna till egenvärdena $-3$ och 9.

$$\underline{\underline{\lambda=-3}}: \left(\begin{array}{ccc|c}5 & 5 & -1 & 0\\5 & 5 & -1 & 0\\-1 & -1 & 11 & 0\end{array}\right) \overset{\substack{r_2-r_1\\5r_3+r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c}5 & 5 & -1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 54 & 0\end{array}\right) \Longrightarrow X = t\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \quad t\in\mathbb{R},$$

$$\underline{\underline{\lambda=9}}: \left(\begin{array}{ccc|c}-7 & 5 & -1 & 0\\5 & -7 & -1 & 0\\-1 & -1 & -1 & 0\end{array}\right) \overset{\substack{r_1-7r_3\\r_2+5r_3\\r_1\leftrightarrow r_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c}-1 & -1 & -1 & 0\\0 & -12 & -6 & 0\\0 & 12 & 6 & 0\end{array}\right) \overset{\substack{r_3+r_2\\r_2/(-6)\\-r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 0\\0 & 2 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X = t\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}, \quad t\in\mathbb{R},$$

$$\widehat{\mathbf{u}}_{-3} = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{u}}_9 = \frac{1}{\sqrt{6}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

(a) **Sats 9.1.11**, sid 227 ger

$$-3|\mathbf{u}|^2 \leq Q(\mathbf{u}) = -1 \leq 9|\mathbf{u}|^2.$$

Den högra olikheten är trivialt uppfylld för alla $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ och har därmed inget informationsinnehåll. Den vänstra olikheten är ekvivalent med

$$3\,|\mathbf{u}|^2 \geq 1 \iff |\mathbf{u}| \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

med likhet då $\mathbf{u}$ är en egenvektor till $-3$ av längd $1/\sqrt{3}$, d v s om

$$\mathbf{u} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\widehat{\mathbf{u}}_{-3} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

Detta innebär att av alla $\mathbf{u}$ i $\mathbb{R}^3$ för vilka $Q(\mathbf{u}) = -1$ så är $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\widehat{\mathbf{u}}_{-3}$ de kortaste. Punkterna på ytan (som är en två-mantlad hyperboloid) som är närmast origo, avstånd $1/\sqrt{3}$, är alltså $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, 0\right)$.

(b) Enligt **Sats 9.1.11**, sid 227 gäller då $|\mathbf{u}| = \sqrt{3}$ att

$$\lambda_{\min}|\mathbf{u}|^2 = -3\left(\sqrt{3}\right)^2 = -9 \leq Q(\mathbf{u}) \leq \lambda_{\max}|\mathbf{u}|^2 = 9\left(\sqrt{3}\right)^2 = 27$$

med likhet i den första olikheten om

$$\mathbf{u} = \pm\sqrt{3}\widehat{\mathbf{u}}_{-3} = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

och i den andra olikheten om

$$\mathbf{u} = \pm\sqrt{3}\widehat{\mathbf{u}}_{9} = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},$$

d v s

$$\min_{|\mathbf{u}|=\sqrt{3}} Q(\mathbf{u}) = Q\left(\pm\sqrt{3}\widehat{\mathbf{u}}_{-3}\right) = Q\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right) = -9 \quad \text{och}$$

$$\max_{|\mathbf{u}|=\sqrt{3}} Q(\mathbf{u}) = Q\left(\pm\sqrt{3}\widehat{\mathbf{u}}_{9}\right) = Q\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\right) = 27.$$

6. Definitionen av egenvärde och egenvektor ger att det finns $\lambda_1, \lambda_2$så att $F(\mathbf{u}_1) = \lambda_1\mathbf{u}_1$ och $F(\mathbf{u}_2) = \lambda_2\mathbf{u}_2$. Beräkning med hjälp av $A$ ger

$$F(\mathbf{u}_1) = F(1,2,1) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4 & -3 & a\\8 & b & 4\\c & -6 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2+a\\12+2b\\c-7\end{pmatrix} = \lambda_1\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},$$

$$F(\mathbf{u}_2) = F(-1,0,2) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 4 & -3 & a \\ 8 & b & 4 \\ c & -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -4+2a \\ 0 \\ -c+10 \end{pmatrix} = \lambda_2 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Detta ger oss ett linjärt ekvationssystem med sex ekvationer och fem obekanta. Enklast blir det om studerar 1:a och 3:e-koordinaten i respektive funktionsvärde ovan. Då fås

$$\left.\begin{array}{l} \begin{cases} -2+a = \lambda_1 \\ c-7 = \lambda_1 \end{cases} \overset{ekv_2 - ekv_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} -2+a = \lambda_1 \\ c-a-5 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -4+2a = -\lambda_2 \\ -c+10 = 2\lambda_2 \end{cases} \overset{ekv_2 + 2ekv_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} -4+2a = \lambda_2 \\ 4a-c+2 = 0 \end{cases} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -a+c = 5 \\ 4a-c = -2 \end{cases} \overset{ekv_2 + ekv_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} -a+c = 5 \\ 3a \phantom{+c} = 3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = 5+a = 6 \end{cases}.$$

Insättning i de första ekvationssystemen ger då att

$$\begin{aligned} -2+a &= -2+1 = -1 = \lambda_1, \\ -4+2a &= -4+2 = -2 = -\lambda_2 \iff \lambda_2 = 2. \end{aligned}$$

Återstår då endast att bestämma $b$. Insättning av detta i $F(\mathbf{u}_1)$ (vi tar med $F(\mathbf{u}_2)$ för kontrollens skull) ger då

$$F(\mathbf{u}_1) = F(1,2,1) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 8 & b & 4 \\ 6 & -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 12+2b \\ -1 \end{pmatrix} = -1\, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 12+2b = -2 \iff b = -7$$

$$F(\mathbf{u}_2) = F(-1,0,2) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 8 & b & 4 \\ 6 & -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Följaktligen, om $a = 1,\ b = -7,\ c = 6$ så blir $(1,2,1)$ och $(-1,0,2)$ egenvektorer med egenvärden $-1$ respektive 2.

7. Vi börjar med att observera att *kolonnvektorerna är parvis ortogonala* och att samtliga har längd 3. Detta innebär att matrisen $B = \frac{1}{3}A$ är en *ON-matris* eftersom dess kolonner är en ON-bas (**Sats 6.3.23**, sid 156). Därmed är avbildningen $G = \frac{1}{3}F$ en *isometrisk* avbildning (**Sats 7.7.2**, sid 191). För att avgöra vilken sort beräkna vi determinanten av $B$

$$\det B = \frac{1}{3^3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_3 + 2r_1}}{=} \frac{1}{3^3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 6 & -3 \end{vmatrix} \overset{r_3 + 2r_2}{=} \frac{1}{3^3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = \frac{-3 \cdot 9}{3^3} = -1,$$

d v s $G = \frac{1}{3}F$ är en spegling eller vridspegling. Då $B = B^t$ och avbildningsmatris till $G = \frac{1}{3}F$ i ON-basen *standardbasen* följer det att $G$ är *symmetrisk*. Därmed är det enda alternativet att $G$ är en spegling eftersom den enda symmetriska vridspeglingen är -Identitetsavbildningen (tänk på hur avblidningsmatrisen till en vridspegling ser ut i "rätt bas"). Speglingsplanets *normal* är den vektor $\mathbf{n}$ med egenskapen att $G(\mathbf{n}) = -\mathbf{n}$, d v s en *egenvektor* till egenvärdet $-1$ till $G$. Därför löser vi ekvationen

$$G(\mathbf{n}) = \frac{1}{3}F(\mathbf{n}) = \frac{1}{3}F(\underline{\mathbf{e}}\,X) = \frac{1}{3}\underline{\mathbf{e}}\,AX = -\,\underline{\mathbf{e}}\,X = -\mathbf{n} \iff AX = -3X \iff$$

$$\iff (A+3I)X = 0 \iff$$

$$\iff \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_1+2r_3 \\ r_2+r_3 \\ r_1 \leftrightarrow r_3/2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_3-r_2 \\ r_2/6}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X_{-1} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Följaktligen är vektorn $\mathbf{n} = (1, -1, 1)$ normal till speglingsplanet som då får ekvationen $x - y + z = 0$. Detta ger att $F = 3G$ är en spegling i detta plan följt av en sträckning faktorn 3.
**Alternativ:** Det går förstås utmärkt att beräkna egenvärden och egenvektorer också. Vi får då

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{r_3+r_2}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 3-\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix} \overset{k_2-k_3}{=}$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & -2 \\ 2 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)((1-\lambda)(-1-\lambda)-8) = (3-\lambda)\left(\lambda^2-9\right) =$$

$$= -(\lambda-3)^2(\lambda+3) = 0 \iff \lambda = 3 \text{ (dubbel)}, -3.$$

Då $A$ är *symmetrisk* finns en ON-bas av egenvektorer (**Sats 8.3.5**, sid 215). Om vi väljer en ON-bas där första basvektorn är en egenvektor till $-3$ får $F$ matrisen

$$A_{\underline{\mathbf{f}}} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

d v s $F$ är en sammansättning av en sträckning en faktor 3 och en spegling i normalplanet till egenvektorn till $-3$.